

3. Экзаменационные вопросы

- 1) Алгебра, подалгебра. Гомоморфизмы и изоморфизмы. Порождающее (неприводимое, минимальное) множество. Примеры.
- 2) Полугруппа, подполугруппа, порождающее множество. Коммутативная полугруппа. Обобщенные ассоциативность и коммутативность. Левые (правые) нейтральные и обратные элементы. Гомоморфизмы полугрупп.
- 3) Группа. Существование и единственность решения уравнений $ax = b$, $ya = b$. Утверждение: если G — полугруппа (соответственно — конечная полугруппа) и для любых a, b каждое из уравнений $ax = b$, $ya = b$ имеет хотя бы одно решение (соответственно — не более одного), то G — группа.
- 4) Три критерия подгруппы: 1) $ab \in M$, $a^{-1} \in M$; 2) $ab^{-1} \in M$; 3) M — конечное и $ab \in M$.
- 5) Гомоморфизмы в группах. Образ единицы, обратного элемента и подгруппы при гомоморфизме. Теорема Кэли.
- 6) Изоморфизм бесконечной циклической группы аддитивной группе целых чисел. Изоморфизм конечной циклической группы мультипликативной группе корней n -ой степени из единицы. Утверждение: любая подгруппа циклической группы — циклическая. Следствие: н.о.д. как порождающий элемент подгруппы аддитивной группы целых чисел.
- 7) Теорема о подгруппах конечной циклической группы. Круговые многочлены. Функция Эйлера.
- 8) Левые (правые) нормальные делители. Разбиение группы на смежные классы. Фактор-множество. Теорема Лагранжа.
- 9) Нормальный делитель группы. Критерий нормального делителя. Пересечение нормальных делителей. Фактор-группа.
- 10) Ядро гомоморфизма групп. Связь нормальных делителей с гомоморфизмами групп.
- 11) Кольцо, подкольцо, делители нуля, тело, поле. Гомоморфизмы в кольцах.
- 12) Идеалы колец. Фактор-кольцо. Связь идеалов с гомоморфизмами колец.
- 13) (Линейная) алгебра над полем. Тело кватернионов.
- 14) Характеристика тела, ее свойства. Минимальное подполе тела. Утверждение: в полях характеристики p справедливо равенство $(a \pm b)^{p^k} = a^{p^k} \pm b^{p^k}$. Малая теорема Ферма.
- 15) Кольцо формальных степенных рядов. Кольцо многочленов. Левое (правое) деление с остатком.
- 16) Левое (правое) значение многочлена (суммы, произведения). Обобщенная теорема Безу. Схема Горнера.

- 17) Алгоритм Евклида. Представление н.о.д. в виде $u(x)f(x) + v(x)g(x)$. н.о.д. многочленов f_1, f_2, \dots, f_s .
- 18) Взаимно простые многочлены. Критерий $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$. Свойства.
- 19) Неприводимые многочлены над полем. Существование и единственность разложения многочленов на неприводимые множители.
- 20) Кратные множители. Отделение кратных множителей над полем нулевой характеристики
- 21) Существование и единственность поля разложения многочлена (единственность — без доказательства).
- 22) Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна. Алгебраические расширения полей. Освобождение от иррациональности в знаменателе.
- 23) Свойства рациональных корней многочлена с целыми (рациональными) коэффициентами.
- 24) Матричные многочлены. Теорема Гамильтона–Кэли.
- 25) Аннулирующий многочлен преобразования (матрицы). Существование и единственность минимальной аннулирующей многочлена. Метод А.Н. Крылова.
- 26) Выражение минимального многочлена через наибольшие общие делители миноров характеристической матрицы.
- 27) Матрицы над евклидовым кольцом. Примеры: λ -матрицы (полиномиальные матрицы), матрицы над кольцом целых чисел. Эквивалентность матриц над евклидовым кольцом. Унимодулярные матрицы. Приведение к нормальной диагональной форме Смита.
- 28) Связь подобия матриц над произвольным полем с эквивалентностью их характеристических матриц.
- 29) Фробениусова нормальная форма. Существование и единственность.
- 30) Утверждение: если $\prod_{i=1}^s f_i(\lambda) = f(\lambda)$ — минимальный многочлен преобразования φ линейного пространства V , где $f_1(\lambda), \dots, f_s(\lambda)$ — попарно простые многочлены, то V — прямая сумма линейных подпространств $\text{Ker } f_1(\varphi), \dots, \text{Ker } f_s(\varphi)$.
- 31) Теорема Жордана. Построение жорданова базиса с помощью НДФ.
- 32) Построение жорданова базиса с помощью корневых подпространств.
- 33) Выражение числа Жордановых клеток с заданным собственным числом λ_k через ранги матриц $(A - \lambda_k E)^\nu$.
- 34) Интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра. Функции от матриц.
- 35) Утверждение: конечная мультипликативная подгруппа поля — циклическая.

- 36) Утверждение: порядок конечного поля есть степень простого числа. Порядок подполя конечного поля.
- 37) Утверждение: для любого простого p и любого натурального n существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле порядка p^n .