

#631

Один конец пружины закреплён неподвижно, а к другому прикреплен груз массы m . При движении груза со скоростью v сила сопротивления равна hv . При $t=0$ грузу, грузу, находящемуся в положении равновесия, сообщена скорость v_0 . Исследовать движение груза в случаях $h^2 < 4km$ и $h^2 > 4km$.

Решение:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0; m \neq 0$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$l^2 + \frac{h}{m}l + \frac{k}{m} = 0$$

$$D = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

a) $h^2 < 4km$

$$l_{1,2} = \frac{-\frac{h}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}$$

$$x = C_1 e^{\frac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t}$$

$$\dot{x} = C_1 \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} e^{\frac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t} + C_2 \frac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} e^{\frac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = C_1 \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} + C_2 \frac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{v_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}} \\ C_2 = -\frac{v_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}} \end{cases}$$

$$x = \frac{v_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}} \left[e^{\frac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t} - e^{\frac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t} \right]$$

б) $h^2 > 4km$

$$l_{1,2} = \frac{-\frac{h}{m} \pm i \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} = \frac{-h \pm i \sqrt{4km - h^2}}{2m}$$

$$x = e^{\frac{-h}{2m}t} \left[C_1 \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t + C_2 \cos \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t \right]$$

$$\dot{x} = \frac{-h}{2m} e^{\frac{-h}{2m}t} \left[C_1 \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t + C_2 \cos \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t \right] +$$

$$+ e^{\frac{-h}{2m}t} \left[C_1 \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} \cos \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t - C_2 \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t \right] =$$

$$= e^{\frac{-h}{2m}t} \left\{ \frac{-h}{2m} \left[C_1 \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t + C_2 \cos \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} \left[C_1 \cos \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t - C_2 \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t \right] \right\}$$

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ v_0 = \frac{-h}{2m} C_2 + \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{2v_0 m}{\sqrt{4km - h^2}} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = e^{\frac{-h}{2m}t} \frac{2v_0 m}{\sqrt{4km - h^2}} \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t$$

Ответ: при $h^2 < 4km$ $x = \frac{v_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}} \left[e^{\frac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t} - e^{\frac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}t} \right]$, при $h^2 > 4km$

$$x = e^{\frac{-h}{2m}t} \frac{2v_0 m}{\sqrt{4km - h^2}} \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t$$

#633

На конце упругого стержня укрепленa масса m . Другой конец стержня вибрирует так, что его смещение в момент t равно $B \sin \omega t$. Упругая сила, возникающая в стержне, пропорциональна разности смещений его концов. Найти амплитуду A вынужденных колебаний массы m . Может ли быть $A > B$? (Массой стержня и трением можно пренебречь.)

Решение:

$$m\ddot{x} + k(x - B \sin \omega t) = 0; \quad m \neq 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kB}{m} \sin \omega t$$

$$l^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow l_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_{\text{общ.одн.}} = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t = C \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + y \right)$$

$$C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \equiv C \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + y \right) = C \left[\sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \cos y + \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \sin y \right]$$

$$\begin{cases} C_1 = C \sin y \\ C_2 = C \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{C_1}{\sin y} \\ C_2 = \frac{C_1}{\sin y} \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{C_1}{\sin y} \\ y = \arctg \frac{C_1}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{C_1}{\sin \left(\arctg \frac{C_1}{C_2} \right)} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ y = \arctg \frac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

$$x_{\text{ч.неодн.}} = A \sin(\omega t + j)$$

$$\ddot{x}_{\text{ч.неодн.}} = -\omega^2 A \sin(\omega t + j)$$

$$-\omega^2 A \sin(\omega t + j) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + j) \equiv \frac{kB}{m} \sin \omega t$$

$$A \left[\frac{k}{m} - \omega^2 \right] [\sin \omega t \cos j + \sin j \cos \omega t] \equiv \frac{kB}{m} \sin \omega t$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{kB}{m} &= A \left[\frac{k}{m} - \omega^2 \right] \cos j \\ 0 &= A \left[\frac{k}{m} - \omega^2 \right] \sin j \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} j &= 0 \\ A &= \frac{kB}{k - \omega^2 m} \end{aligned} \right.$$

$$j = 0$$

$$A = \frac{kB}{k - \omega^2 m}$$

$$x_{\text{о.неодн.}} = \frac{kB}{k - \omega^2 m} \sin \omega t + \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arctg \frac{C_1}{C_2} \right)$$

Ответ: $x_{\text{о.неодн.}} = \frac{kB}{k - \omega^2 m} \sin \omega t + \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arctg \frac{C_1}{C_2} \right)$

#635

Электрическая цепь состоит из последовательно включённых источника постоянного тока, дающего напряжение V , сопротивления R , самоиндукции L и выключателя, который включается при $t=0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t>0$).

Решение:

Падения напряжений на резисторе и катушке индуктивности соответственно:

$$U_R = R \cdot I$$

$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

Так как

$$U_R + U_L = V$$

получаем линейное неоднородное уравнение:

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} = V$$

Решая линейное однородное уравнение

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} = 0$$

получаем его общее решение

$$I(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Частное решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$I(t) = A$$

A – полином нулевой степени. Подставляя это выражение в уравнение, получаем частное решение:

$$A = \frac{V}{R}, \quad I(t) = \frac{V}{R}$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$I(t) = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

Определим значение константы C из условия $I(t)=0$:

$$I(0) = C e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \frac{V}{R} = 0$$

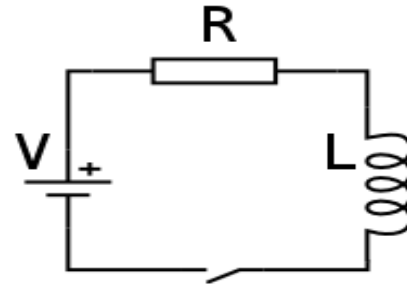
$$C + \frac{V}{R} = 0$$

$$C = -\frac{V}{R}$$

Подставив найденное значение константы в общее решение, получим закон изменения силы тока в зависимости от времени:

$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Ответ:
$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$



637

Последовательно закреплены сопротивление R и конденсатор емкости C , заряд которого при $t=0$ равен q . Цепь замыкается при $t=0$. Найти силу тока в цепи при $t>0$.

Решение:

По второму закону Кирхгофа:

$$U_R + U_C = 0$$

$$U_R = RI$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

$$RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$I = \dot{q}$$

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$q = c_1 e^{-\frac{t}{RC}}$$

При $t=0$ заряд равен q_0

$$q_0 = c_1 e^0 \Rightarrow c_1 = q_0$$

$$I = \dot{q} = \left(q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \right)' = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ответ: $I = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$

#639

Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V \sin \omega t$, сопротивление R и самоиндукция L . Найти силу тока в цепи (установившийся режим).

Решение:

$$U_R = RI$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$U_R + U_L = E$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V \sin(\omega t)$$

$$I = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

Но так как в электротехнике важнее знать не коэффициенты a и b , а амплитуду изменения силы тока, то ищем в виде:

$$I = A \sin(\omega t - j)$$

Подставим это решение в уравнение(1):

$$I = A \sin(\omega t) \cos j - A \sin j \cos(\omega t)$$

$$\frac{dI}{dt} = A \omega \cos(\omega t - j) = A \omega \cos(\omega t) \cos j + A \omega \sin(\omega t) \sin j$$

$$A(R(\sin(\omega t) \cos j - \sin j \cos(\omega t)) + L\omega(\cos(\omega t) \cos j + \sin(\omega t) \sin j)) = V \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} AR \cos j + LA \omega \sin j = V \\ -AR \sin j + LA \omega \cos j = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{LA \omega \cos^2 j}{\sin j} + LA \omega \sin j = \frac{LA \omega}{\sin j} = V \\ AR = \frac{LA \omega \cos j}{\sin j} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin j = \frac{LA \omega}{V} \\ AR = V \cos j \end{cases} \quad \begin{cases} \sin j = \frac{LA \omega}{V} \\ \cos j = \frac{AR}{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (AR)^2 + (LA \omega)^2 = V^2 \\ -A^2 R L \omega + A^2 R L \omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \\ j = \arctg \frac{L\omega}{R} \end{cases}$$

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{L\omega}{R})$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{L\omega}{R})$$