МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра теории управления и динамики машин

© ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

(Сборник задач для практических занятий
по курсу "Методы оптимизации")

Н.Новгород, 2001

УДК: 531.38;531.39.
© Оптимизация функций и динамических процессов. Сборник задач для практических занятий по курсу "Методы оптимизации" / Сост. С.Ю.Городецкий, З.Г.Павлючонок, В.П.Савельев. - Н.Новгород: Нижегородский университет. 2001, 52с.

В данную методическую разработку включены задачи по четырем основным разделам программы практических занятий курса "Методы оптимизации": динамическому программированию, математическому программированию, вариационному исчислению и оптимальному управлению.

В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения и разобраны примеры решения типовых задач . Особенно богат интересными решениями раздел по вариационному исчислению.

Составители: С.Ю.Городецкий, канд.физ.-мат.наук, доц.каф. ТУ и ДМ;
З.Г.Павлючонок, канд.физ.-мат.наук, доц.каф. ТУ и ДМ;
В.П.Савельев, канд.физ.-мат.наук, доц.каф. ТУ и ДМ.

Рецензент: А.В.Баркалов, канд.физ.-мат.наук,доц.каф. МО ЭВМ.

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского,
2001

1. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, состояние которой в некоторый дискретный момент времени k описывается вектором $x_k \in X_k \subset R^n$, а закон изменения ее состояния определяется соотношением $x_{k+1} = f_{k+1}(x_k, u_{k+1})$, где управления u_{k+1} выбираются из множеств управлений, допустимых в текущий момент времени k для состояния x_k, т.е. $u_{k+1} \in U_{k+1}(x_k) \subset R^m$, где множества $U_{k+1}(x_k)$ заданы.

Будем рассматривать только такие задачи, в которых дискретное время k изменяется в заранее известных пределах: $k = 0, 1, ..., N-1$, где N - задано. Относительно начального состояния x_o известно, что $x_o \in X_o$ - заданному множеству начальных состояний. Требуется также, чтобы конечное состояние x_N принадлежало заданному множеству X_N допустимых финальных состояний.

С каждым переходом из состояния x_k в следующее состояние свяжем функцию затрат (или доходов) на текущем шаге $d(x_k, u_{k+1})$, зависящую также от момента времени и использованного управления. Требуется найти такое начальное состояние $x_o^* \in X_o$ и такой допустимый набор управлений $u_1^*, ..., u_N^*$, переводящий систему в одно из состояний $x_N^* \in X_N$, чтобы общие затраты, являющиеся аддитивной функцией затрат на отдельных шагах, были минимальны. Для решения задач динамического программирования используется подход, разработанный в лаборатории Р.Беллмана в 50-х годах XX века. Согласно этому подходу, вместо исходной N -шаговой задачи нужно рассмотреть набор вспомогательных задач, подобных исходной, но включающих разное количество шагов (от 1 до N). В этих задачах требуется определить оптимальные затраты на одном последнем шаге, двух последних шагах, трех, и т.д. при условии, что считается известным состояние, в котором оказался управляемый динамический процесс перед выполнением этих завершающих шагов. Подход Р.Беллмана основан на том, что можно установить рекуррентную связь между решением задачи для $(k+1)$-го шага и решением задачи для k шагов.

Пусть Y_k- множество состояний, из которых при использовании допустимых управлений можно ровно за k шагов попасть в одно из состояний финального множества X_N. Возьмем произвольное $x_{N-k} \in Y_k$ и обозначим через $S_k(x_{N-k})$ функцию, описывающую зависимость оптимальных затрат от состояния x_{N-k} при переводе системы из x_{N-k} в X_N за k шагов.

Поскольку для состояний x_{N-1} из множества Y_1 переход в X_N происходит за один шаг, то очевидно, что

$$S_1(x_{N-1}) = \min \{ d_N(x_{N-1}, u_N) : u_N \in U_N(x_{N-1}), f_N(x_{N-1}, u_N) \in X_N \} \qquad (1)$$

Значение u_N, при котором достигается минимум в этом соотношении, обозначим через $u^*_N(x_{N-1})$.

Можно доказать, что каждая последующая функция $S_{k+1}(x_{N-k-1})$ рекуррентно выражается через предыдущую $S_k(x_{N-k})$, а именно, для $x_{N-k-1} \in Y_{k+1}$

$$S_{k+1}(x_{N-k-1}) = \min\{d_{N-k}(x_{N-k-1}, u_{N-k}) + S_k(f_{N-k}(x_{N-k-1}, u_{N-k})): u_{N-k} \in U_{N-k}(x_{N-k-1}), f_{N-k}(x_{N-k-1}, u_{N-k}) \in Y_k\}. \qquad (2)$$

Пусть $U^*_{N-k}(x_{N-k-1})$ - то значение управления, при котором достигается этот минимум.

Полученные соотношения $U^*_k(x_{k-1})$ определяют оптимальные правила управления в виде функций от текущего состояния динамического процесса, т.е. задают закон оптимального управления в форме оптимального регулятора по состоянию. Чтобы получить оптимальное начальное состояние x^*_o и значения оптимального управления в явной форме, необходимо дополнительно решить задачу вида

$$x^*_o = \arg\min \{S_N(x_o): x_o \in X_o\}$$

а затем последовательно определить

$$u^*_1 = u^*_1(x_o) \ , x^*_1 = f_1(x^*_o, u^*_1), ...$$
$$u^*_k = u^*_k(x^*_{k-1}), x^*_k = f_k(x^*_{k-1}, u^*_k),...,$$

включая u^*_N и x^*_N.

Заметим, что уравнения (1), (2) определяют следующее правило построения управления: вне зависимости от того, каким образом управляемый процесс на шаге k попал в состояние x_k, далее надо применять управление, оптимальное для этого состояния в завершающем $(N-k)$- шаговом процессе, т.е. в состоянии x_k нужно применять правило $u^*_{k+1}(x_k)$. Это одна из возможных формулировок принципа Беллмана в форме достаточного условия. Принцип означает, что управление в каждый данный момент следует выбирать с учетом его влияния на будущее, а также то, что последствия неправильного выбора, совершенного в данный момент, в будущем исправить нельзя.

Нужно обратить внимание на то, что при использовании метода Беллмана первым важным этапом решения является такая постановка исходной задачи, при которой она укладывается в схему динамического программирования. Часто это можно сделать несколькими разными способами. Важным является также то, что на основе рекуррентных соотношений Беллмана можно решать задачи, отличающиеся по форме от приведенной стандартной постановки. Например, функция общих затрат может не являться аддитивной, а иметь вид произведения или максимума затрат по шагам, если только эти затраты, определяемые функциями $d_k(x_{k-1}, u_k)$, положительны.

Ниже применение метода динамического программирования продемонстрировано на примере двух задач. Первая - стандартная, вторая- нет.

Пример 1. ***Задача об оптимальном графике лечения***.

Пусть на интервале времени (О,Т) больному должны сделать N инъекций лекарства. Стоимость инъекции равна $a > 0$. В начальный момент $t = 0$ инъекция уже сделана, и в момент $t = T$ обязательно производится завершающая. Пусть длины интервалов между инъекциями составляют $u_1, u_2, \ldots, u_N$, тогда интервал перед завершающей будет равен $T - (u_1 + \ldots + u_N)$. Пусть издержки больного из-за наличия промежутка u_k составляют $f(u_k)$ в условном стоимостном выражении, а цена одной порции лекарства равна a. Функция $f(u)$ будет считаться достаточно гладкой и строго выпуклой $(f^{//}(u) > 0)$. Требуется за счет выбора длин интервалов u_k $(k = \overline{1, N})$ добиться минимума общих издержек в виде суммы

$$\sum_{k=1}^{N} (a + \varphi(u_k)) + (a + \varphi(T - \sum_{i=1}^{N} u_i)).$$

Чтобы представить задачу в форме задачи динамического программирования, будем рассматривать промежутки между инъекциями $u_1, u_2, \ldots, u_N$ как управления, а в качестве состояния x_k примем время, оставшееся до завершающей инъекции после проведения k-ой. Тогда начальное состояние процесса $x_o = T$, а закон изменения состояния процесса $x_k = x_{k-1} - u_k$, где $u_k \in u_k(x_{k-1}) = (0, x_{k-1})$. Очевидно, что функция затрат на k-ом шаге имеет вид

$$d_k(x_{k-1}, u_k) = a + f(u_k)$$

для $k = 1, \ldots, N-1$, а

$$d_N(x_{N-1}, u_N) = a + \varphi(u_N) + a ++ \varphi(x_{N-1} -- u_N).$$

Составим уравнения Беллмана.

Пусть все инъекции, кроме N-й, проведены и управляемый процесс находится в состоянии x_{N-1}, тогда минимальные (за счет выбора u_N) затраты в оставшемся одношаговом процессе составят

$$S_1(x_{N-1}) = \min\{(2a + \varphi(u_N) + \varphi(x_{N-1} - u_N) : 0 < u_N < x_{N-1}\}$$

Значение u_N, определяющее минимум на открытом промежутке, ищем из условия обращения в ноль производной $\varphi^{/}(u_N) - \varphi^{/}(x_{N-1} - u_N) = 0$, поскольку $\varphi^{//}(u_N) + \varphi^{//}(x_{N-1} - u_N) > 0$. Отсюда следует, что $\varphi^{/}(u_N) = \varphi^{/}(x_{N-1} - u_N)$, или $u_N = x_{N-1}/2$.

Итак, $u^*_N(x_{N-1}) = x_{N-1}/2$, а $S_1(x_{N-1}) = 2a + 2f(x_{N-1}/2)$. Пусть теперь проведены все инъекции, кроме $(N-1)$-й и N-й (не считая завершающей в момент времени T), а длина оставшегося промежутка времени составляет x_{N-2}. Тогда

$$S_2(x_{N-2}) = \min\{(a + \varphi(u_{N-1}) + S_1(x_{N-2} - u_{N-1})) : 0 < u_N < x_{N-1}\} = \min\{3a + \varphi(u_{N-1}) + 2\varphi\left(\frac{x_{N-2} - u_{N-1}}{2}\right) : 0 < u_{N-1} < x_{N2}\}.$$

Минимум находим из условия

$$\varphi^{/}(u_{N-1}) — \varphi\left(\frac{x_{N-2} - u_{N-1}}{2}\right) = 0,$$

или

$$\varphi'(u_{N-1}) = \varphi\left(\frac{x_{N-2} - u_{N-1}}{2}\right), \text{ т.е. } u_{N-1} = x_{N-2}/3.$$

Итак,

$$u^*_{N-1}(x_{N-2}) = x_{N-2}/3, \quad S_2(x_{N-2}) = 3a + 3\varphi\left(\frac{x_{N-2}}{3}\right).$$

Легко увидеть возникающую закономерность. Для ее обоснования применим метод математической индукции. Предположим, что $u^*_{N-к+1}(x_{N-к}) = x_{N-к}/(k+1)$, $S_к(x_{N-к}) = (k+1)(a + \varphi\left(\frac{x_{N-k}}{k+1}\right))$.

Тогда

$$S_{к+1}(x_{N-к-1}) = \min\{a + \varphi(u_{N-к}) + S_к(x_{N-к-1} u_{N-к}) : 0 < u_{N-к} < x_{N-к-1}\} =$$

$$= \min\{(k+2)a + \varphi(u_{N-к}) + (k+1)\varphi\left(\frac{x_{N-k-1} - u_{N-k}}{k+1}\right) : 0 < u_{Nк} < x_{N-к-1}\}$$

Из условия равенства нулю первой производной находим, что

$$\varphi^{/}(u_{N-к}) = \varphi^{/}\left(\frac{x_{N-k-1} - u_{N-k}}{k+1}\right), \text{ т.е. } u^*_{N-к}(x_{N-к-1}) = x_{N-k-1}/(k+2), \text{ а } S_{к+1}(x_{N-k-1}) = (k+2)(a + \varphi\left(\frac{x_{N-k-1}}{k+2}\right)).$$

Следовательно, доказано, что эти соотношения верны для всех k.

Тогда

$$u^*_1 = T/(N+1),\ x^*_1 = T - u^*_1 = \frac{TN}{N+1},$$

$$u^*_2 = \frac{TN}{(N+1)N} = T/(N+1)\ ,\ \ x^*_2 = \frac{T(N-1)}{N+1}\ ,$$

$$u^*_N = \frac{T\,2}{(N+1)2} = T/(N+1)\ .$$

Окончательно имеем: оптимальные затраты равны $S_N(T) = (N+1)(a + \varphi(T/(N+1)))$, и достигаются при проведении инъекций через равные промежутки времени $u^*_1 = u^*_2 = ... = u^*_N = T/(N+1)$.

<u>Пример 2.</u> Оптимальное соединение точек.

На числовой оси y задана $N+1$ точка в порядке возрастания координат $y_1 < y_2 < .... < y_{N+1}$. Длины отрезков $[y_1 y_2], ..., [y_N y_{N+1}]$ заданы и выражаются положительными числами $p_1, p_2, ..., p_N$. Пометим часть отрезков $[y_k, y_{k+1}]$ так, чтобы каждая точка $y_1, y_2, .., y_{N+1}$ принадлежала хотя бы одному из помеченных отрезков. Обозначим пометки через $u_1, u_2, ..., u_N$, считая, что при $u_k = 1$ отрезок $[y_k, y_{k+1}]$ помечен, а при $u_k = 0$ - нет. Требуется расставить пометки так, чтобы сумма длин помеченных отрезков, равная $\sum_{k=1}^{N} p_k u_k$, была минимальна. При этом, очевидно, из условий задачи вытекают следующие ограничения на u_k: соседние значения u_k, u_{k+1} не могут одновременно обращаться в 0. Вместо одной задачи из N отрезков рассмотрим задачи из 1-го, 2-х, 3-х и т.д. первых отрезков. Пусть $S_1, S_2, ...$ - наименьшие возможные суммы длин помеченных отрезков в таких задачах, а $u^*_{k-1}(k)$- оптимальная пометка $k-1$ - го отрезка в задаче, включающей k первых отрезков (следует учитывать, что первый и последний отрезки помечаются обязательно).

Заметим, что, в отличие от общего случая, в этой задаче функция Беллмана не имеет аргумента, поскольку ее значение зависит только от индекса, показывающего число отрезков в задаче. Очевидно,

$$S_1 = p_1,\ u^*_1(1) = 1,$$
$$S_2 = p_1 + p_2,\ u^*_2(2) = 1,\ u^*_1(2) = 1$$
$$S_3 = min\{p_3 + S_1,\ p_3 + S_2\},$$

$u^*_2(3)$ равно 0, если минимум достигается на первом элементе, и 1, если на втором.

Очевидно, что для значений $k+1 :\ 2 < k+1 \le N$

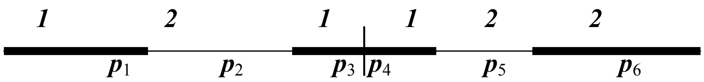
$$S_{k+1} = p_{k+1} + min\ \{S_{k-1}, S_k\},\ \text{а}$$

$$U^*_k(k+1)\begin{cases} 0, если\ S_{k-1} \le S_k \\ 1, если\ S_{k-1} \ge S_k. \end{cases}$$

Покажем как можно получить окончательное решение при конкретных данных. Пусть $N=6$ и $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 1, p_4 = 1, p_5 = 2, p_6 = 2$.

Применяя приведенные расчетные формулы, получим

$$S_1 = 1,\ u^*_1(1) = 1;\ S_2 = 3,\ u^*_2(2) = 1,$$
$$S_3 = 1 + min\{1,3\} = 2,\ u^*_2(3) = 0,\ u^*_3(3) = 1,$$
$$S_4 = 1 + min\{3,2\} = 3,\ u^*_3(4) = 1,\ u^*_4(4) = 1,$$
$$S_5 = 2 + min\{2,3\} = 4,\ u^*_4(5) = 0,\ u^*_5(5) = 1,$$
$$S_6 = 2 + min\{3,4\} = 5,\ u^*_5(6) = 0,\ u^*_6(6) = 1,$$



Последние найденные значения $u^*_{5,6}(6)$ показывают, что в задаче с $N=6$ отрезками отрезок p_6 помечается, т.е. $u^*_6 = 1$, а p_5 нет, т.е. $u^*_5 = 0$. В силу того, что p_5 не помечен, необходимо рассмотреть укороченную задачу для оставшихся 4-х отрезков($p_1, ... p_4$). Из полученных условных решений видно, что в возникшей четырехшаговой задаче $u^*_4 = u^*_4(4) = 1$ и $u^*_3 = u^*_3(4) = 1$.

Поскольку p_3 оказался помеченным, то далее следует рассмотреть трехинтервальную задачу p_1, p_2, p_3. Видим, что $u^*_2 = u^*_2(3) = 0$. Но тогда остается одноинтервальная задача, и в ней $u^*_1 = 1$. Следовательно, минимальная сумма длин помеченных интервалов равна $S_6 = 5$, а пометки следует поставить так: $u^*_1 = 1$, $u^*_2 = 0$, $u^*_3 = 1$, $u^*_4 = 1$, $u^*_5 = 0$, $u^*_6 = 1$. На рисунке эти интервалы помечены жирными линиями.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Задача о путешественнике.

На местности имеется сеть дорог, связывающих несколько населенных пунктов. Путешественник находится в пункте a_o, из которого, двигаясь по одной из трех дорог, можно попасть в пункты a_1, a_2, a_3. Из каждого пункта опять выходят ровно три дороги, ведущие в a_4, a_5, a_6. Из них - в a_7, a_8, a_9, и так далее, вплоть до конечных пунктов $b_1 = a_{N3-2}$, $b_2 = a_{N3-1}$, $b_3 = a_{N3}$. Длины всех дорог следует считать заданными. Необходимо найти наиболее короткий путь из a_o в один из конечных пунктов. Решить задачу при $N = 5$. Оцените количество операций сложения и сравнения при ее решении по методу Беллмана, а также при полном переборе всех путей.

2. Задача о распределении инвестиций.

Нужно распределить между N предприятиями сумму a, выделенную для их инвестирования. Известно, что вложение средств в размере y в k-ое предприятие обеспечивает прибыль в размере $d_k(y)$. Целью распределения является получение максимального суммарного дохода. Решить задачу при $N = 4$, $a = 300$ при условии, что суммы инвестиций всегда кратны 50, а функции $d_k(y)$ для $y = 50*j$ $(j = 0,1,...,6)$ принимают значения

y :	0	50	100	150	200	250	300
$d_1(y)$:	0,	80,	120,	140,	150,	200,	250
$d_2(y)$:	0,	60,	130,	140,	130,	160,	200
$d_3(y)$:	0,	30,	60,	100,	130,	200,	250
$d_4(y)$:	0,	40,	100,	110,	120,	160,	220

3. Задача о распределении механизмов.

Имеется m видов земляных работ и $N > m$ однотипных механизмов, способных выполнять эти работы. Если назначить на i -й вид работы k механизмов, то их суммарная производительность определяется значением G_{ik}. Считая, что матрица G, составленная из таких значений, известна, найти оптимальное по суммарной производительности размещение механизмов по всем видам работ. Решить задачу, приняв $N = 4$, $m = 3$,

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 14 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \\ 6 & 10 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

4. Задача о распределении ресурса.

Пусть требуется распределить ограниченный ресурс a на доли $x_1,...,x_N$ $(x_1 \geq 0,..., x_N \geq 0, x_1 + ... + x_N \leq a)$ между N предприятиями, каждое из которых приносит доход $f_i(x_i) = c_i x_i^2$ $(c_i > 0)$. Найти оптимальное распределение ресурсов.

5. Решить предыдущую задачу при $f_i(x_i) = c_i\sqrt{x_i}$.

6. Задача о загрузке судна.

Судно, имеющее грузоемкость a, загружается предметами N типов. Один предмет i-го типа имеет стоимость y_i и вес z_i. Требуется найти вариант загрузки судна, при котором стоимость взятых на борт предметов максимальна. Решить задачу для $N = 3$, $a = 200$, $y_1 = 25$,
$y_2 = 40$, $y_3 = 80$, $z_1 = 40$, $z_2 = 50$, $z_3 = 70$.

7. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что хотя бы один предмет каждого типа должен быть погружен на борт судна.

8. Задача о налоге.

В H-ской области решили ввести дополнительный налог на рост доходов частных фирм. Если за N месяцев доходы фирмы образуют возрастающий ряд $0 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_{N+1}$ то, согласно установленным правилам, фирма должна уплатить дополнительный налог в размере $S = (p_2/p_1)^{\alpha} + (p_3/p_2)^{\alpha} + ... + (p_{N+1}/p_N)^{\alpha} - N$, где а > 0. При заданном значении начальных и конечных доходов $p_1 = a < b = p_{N+1}$ фирма должна спланировать график возрастания своих доходов так, чтобы дополнительный налог был минимален. Получить решение задачи аналитически.

9. Задача о надежности.

Технологическая цепочка изготовления изделия включает N операций, выполняемых на автоматизированных участках конвейерной обработки. Устройство, выполняющие операции на i-ом участке, имеет вероятность отказа p_i и стоимость c_i. Для повышения надежности на участке можно установить m_i дублеров, повысив надежность участка до значения $P_i(m_i) = 1 - (1-p_i)^{1+m_i}$. Средства, выделенные на установку устройств-дублеров, ограничены значением C_i. Решить задачу о выборе оптимального количества дублеров, приводящем к максимизации надежности всей технологической цепочки.

При решении принять $N = 3$, $C = 17$, $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,4$, $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$. Для упрощения расчетов принять приближенные значения функций $p_i(m)$

m	0	1	2	3	4
$p_1(m)$	0,5	0,8	0,9	0,9	1,0
$p_2(m)$	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8
$p_3(m)$	0,4	0,6	0,9	0,9	1,0
$p_4(m)$	0,7	0,9	1,0	1,0	1,0

10. Задача о замене оборудования.

Частное предприятие планирует в течение N лет заниматься выпуском изделий, используя некоторое оборудование. В начале можно либо купить новое оборудование возраста $x_o = 0$ лет и стоимостью p, либо подержанное оборудование возраста $x_o > 0$ лет по его ликвидной стоимости $\varphi(x_o)$. Показатели эксплуатации оборудования включают:

$f(t)$- стоимость произведенных за год изделий на оборудовании возраста t лет;

$r(t)$- затраты на эксплуатацию в течение года оборудования возраста t лет.

В процессе эксплуатации оборудование можно менять, продавая старое по ликвидной стоимости $\varphi(t)$ и покупая новое стоимостью p. В конце N-го года оборудование продается по ликвидной стоимости. Требуется определить оптимальный возраст оборудования x_o при начальной покупке и оптимальный график его замены. Выполнить расчеты при $N = 8$, $x_o \in \{0,1,2\}$, $f(t) = 30 - t/2$; $r(t) = 13 + t/2$; $p = 17$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 6 & при\ 0 \le t \le 6 \\ 2 & при\ 7 \le t \le 10 \end{cases}$$

11. Задача о ритмичности производства.

Пусть имеется некоторое производство, которое ежедневно обеспечивается поставками сырья в количествах $p_1, p_2, ..., p_N$. Излишки сырья хранятся на складе емкостью E. Начальное количество сырья на складе задано и составляет E_o. Обозначим $x_1, x_2, ..., x_N$ - объемы сырья, ежедневно забираемые на производство. Общее количество перерабатываемого за N дней сырья известно и равно A. Требуется по известному графику поставок сырья $p_1, p_2, ..., p_N$ составить график его потребления $x_1, x_2, ..., x_N$, минимизирующий неритмичность производства, понимаемую как $\sum_{i=1}^{N} (x_i - A/N)^2$.

Сырье следует считать штучным. Решить задачу при $N = 5$, $E_o = 2$, $E = 10$, $A = 10$, $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$, $P_4 = 6$, $P_5 = 7$.

12. Задача о фермере.

Для фермера, разводящего крупный рогатый скот, определить оптимальный график продаж при следующих условиях. Каждый год некоторое количество голов скота y_i отправляется на продажу. Стоимость проданного скота определяется функцией $f(y_i) = k \cdot y_i$ $(k > 0)$.Оставшаяся часть стада увеличивается за год в α раз ($\alpha > 1$). Начальное поголовье равно A. Решить задачу определения оптимального графика продаж при $N = 4$. Затраты на приобретение начального стада и его содержание не учитывать.

13. Решить задачу 12 с учетом следующих факторов.

Изменение поголовья стада за год происходит за счет приплода с коэффициентом $\alpha > 1$ и падежа с коэффициентом $0 < \beta < 1$. Стоимость содержания единицы скота в год составляет C. Выяснить зависимость оптимальной стратегии продаж от соотношения коэффициентов α, β, c .Принять, что падеж происходит только в "старой" части стада, а приплод наблюдается только в оставшейся части. Можно считать, что затраты на содержание приплода составляют половину общей стоимости содержания .

14. Задача о распределении с неизвестным начальным состоянием.

Предприятие работает в течение N лет. Затраты по начальной закупке сырья равны $\alpha \cdot y_o^2$, где y_o - количество покупаемого сырья. В начале i-го года часть x_i имеющегося сырья пускается в производство. Это приносит доход $f_i(x_i)$. Определить оптимальное начальное количество и использование сырья по годам, максимизирующее суммарный доход с учетом затрат на покупку сырья. Принять $N = 2$, $\alpha = 1$, $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_2) = 0,5x_2^2$.

15. Задача о динамическом выделении с возвратами.

Предприятие функционирует N лет. Начальный капитал равен a. Каждый год некоторая часть u_i имеющейся суммы пускается в оборот с условием возврата в кассу в конце года суммы в размере $f_i(u_i)$. Кроме того, из дохода выплачивается сумма $f_i(u_i)$ в качестве вознаграждения работникам. Найти оптимальные значения $u_1, u_2,...,u_N$, максимизирующие сумму выплаченных вознаграждений. Выполнить расчет при $N = 3, f_1(u) = 0,1u^2, \varphi_1(u)= 0.7u, f_2(u) = 0,2u, \varphi_2(u)= 0.3u, f_3(u) = u, \varphi_3(u) = 0$.

16. Задача о динамическом распределении с возвратами.

Составить оптимальный план ежегодного распределения средств между двумя предприятиями в течение N лет, если начальная сумма средств равна A, доходы от вложения средств x_1 и x_2 в предприятия составляют $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$. Вложенные средства возвращаются в общую кассу для перераспределения в размере ***60%*** от x_1 для первого и ***20%*** от x_2 для второго предприятия. Каждый год все имеющиеся в общей кассе средства полностью перераспределяются с точностью до остатка , меньшегоΔ. x_1 и x_2 выбираются кратными Δ. Решить задачу при $N = 3$, $A = 400$, $\Delta = 50$ и

x	50	100	150	200	250	300	350	400
$f_1(x)$	6	10	15	26	28	38	45	49
$f_2(x)$	8	12	20	28	35	40	46	48.

17. Задача о многоступенчатой ракете.

Ракета-носитель с N ступенями имеет общую массу M, включающую массу m выводимого на орбиту космического аппарата и топливо. Вес оболочек ступеней считается равным нулю. Обозначим вес топлива в ступенях ракеты через $u_1, u_2,...,u_N$. Будем считать, что прирост скорости ракеты при сгорании k-ой ступени пропорционален отношению $u_k/(m+u_N+...+u_k)$. Требуется определить оптимальное распределение топлива по ступеням ракеты. Выполнить расчеты при $N = 3, M = 64, m=1$.

18. Задача оптимального управления с дискретным временем.

Методами динамического программирования решить следующую задачу.
Найти

$$\min\sum_{k=0}^{9}(x_k^2 + u_k^2), \text{ если } x_{k+1} = 0{,}5x_k + u_k , \quad (k = 0,\ldots,9) , \ x_o = 2$$

19. Задача о производстве.

Господин M, желая построить коттедж, одолжил у своего друга на N недель мини-установку по производству дешевого кирпича с функцией производительности $f(x)$ штук в неделю, где x - количество использованного сырья. Следует считать, что производная функции $f(x)$ положительна, но убывает при увеличении x.

Перед началом производства имелась сумма денег A. Стоимость единицы сырья в ценах стартовой недели равна C. Коэффициент инфляции за неделю равен $\alpha > 1$. Сырье покупается еженедельно в количествах $x_1, x_2, ..., x_N$. По окончании N-й недели на оставшиеся неистраченные деньги покупается готовый более дорогой кирпич по цене B за штуку (в ценах стартовой недели). Необходимо составить рекуррентные уравнения Беллмана для определения оптимальных размеров закупки сырья, приводящих к максимизации общего количества полученного кирпича.

20. Задача о накоплении.

Составить рекуррентные уравнения Беллмана для предыдущей задачи при следующем изменении ее условий. В начале в фонд развития вносится сумма денег A. Средства на покупку сырья берутся из фонда развития. Кирпич производится не для личного использования, а для продажи по цене B за штуку (в ценах стартовой недели). При этом **50%** получаемой от продажи суммы добавляется к оставшимся в фонде средствам, а остальные **50%** используются на оплату рабочим, налоги и потребление. Необходимо составить рекуррентные уравнения Беллмана, позволяющие решить задачу об оптимальном выделении средств на закупку сырья для максимизации суммы денег в фонде развития к концу N -й недели.

21. Задача о графике эксплуатации.

Электростанция имеет L агрегатов. Предположим, что производительность одного агрегата за неделю равна C, а единица произведенной электроэнергии продается по цене b. График оплачиваемого производства электроэнергии по неделям задан: $p_1, p_2, ..., p_N$ и нарушаться не должен. Избыточно произведенная электроэнергия не оплачивается. Затраты на поддержание в рабочем состоянии l агрегатов в течение недели равны $r(l)$, затраты на консервацию Δl агрегатов составляют $\varphi(\Delta l)$. Затраты на пуск равны $P(\Delta l)$. Составить рекуррентные уравнения Беллмана для определения оптимального графика эксплуатации агрегатов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.

Рассмотрим задачу о нахождении допустимых значений x, при которых функция $Q(x)$ достигает минимума в области $D = \{ x \in R^n : g_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots, N,\ h_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots, M\}$, т.е.

$$\min \{Q(x): x \in D\}.$$

Функции $Q, g_1,\ldots,g_N, h_1,\ldots,h_M$ будем считать достаточно гладкими.

Можно рассматривать решения двух типов - глобальные и локальные. В первом случае под решением будем понимать точки глобального минимума, а во втором - точки локального минимума. Необходимые условия оптимальности точки дает теорема Куна-Таккера: для того, чтобы точка $x^* \in D$ была решением рассматриваемой задачи, необходимо, чтобы нашелся нетривиальный набор констант λ_o, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $\mu_1, \ldots, \mu_M$, называемых множителями Лагранжа,такой, что:

а) $-\lambda_o \nabla Q(x^*) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_1 \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \nabla h_i(x^*)$;

б) $\lambda_i g_i(x^*) = 0$; $(i = 1,\ldots,N)$ (условие дополняющей нежесткости)

в) $\lambda_o \ge 0,\ \lambda_i \ge 0,\ (i = 1,\ldots,N)$.

Если функции $g_1,\ldots,g_N$ выпуклы (вниз), ограничения - равенства либо отсутствуют, либо линейны, функция $Q(x)$ выпукла (вниз), то все минимумы в задаче будут глобальными. Если при этом дополнительно выполняется какое-либо условие регулярности допустимой области D в точке x^*, гарантирующее, что $\lambda_o \neq 0$, то условия теоремы Куна-Таккера (а), (б), (в) вместе с требованием $x^* \in D$ будут не только необходимыми, но и достаточными условиями, определяющими точку глобального минимума x^*. Можно указать два простых достаточных условия регулярности.

Условие регулярности Слейтера: если $g_1(x),\ldots,g_N(x)$ - выпуклы (вниз), $h_1(x),\ldots,h_M(x)$ – либо отсутствуют, либо линейны и существует допустимая точка $\bar{x}$ такая, что все неравенства в ней выполняются строго, т.е. $g_i(\bar{x}) < 0$ ($i = 1,\ldots,N$), то область D регулярна во всех своих точках.

Из условия Слейтера можно получить следующее удобное следствие. Если область D задана линейными ограничениями и $D \neq \varnothing$, то D регулярна во всех своих точках.

Условия регулярности для произвольных областей: если в точке x^* активны (т.е. обращаются в равенства) ограничения $g_{i1}(x^*) = 0, \ldots, g_{ir}(x^*) = 0$ и система векторов $\nabla g_{i1}(x^*), \ldots, \nabla g_{ir}(x^*), \nabla h_1(x^*),\ldots, \nabla h_M(x)$ - линейно независима, то область D регулярна в точке x^*.

Следует обратить внимание на то, что условие дополняющей нежесткости (в) в теореме Куна-Таккера означает, что в первой сумме векторного равенства (а) ненулевыми могут быть только те слагаемые, которые отвечают активным в точке x^* ограничениям-неравенствам. Поскольку точка x^* неизвестна, то при использовании условий Куна-Таккера приходится выдвигать гипотезы о составе $I(x^*)$ - множестве номеров активных в точке x^* ограничений-неравенств.

Коррекция предполагаемого набора $I(x^*)$ должна выполняться с учетом результатов решения системы условий Куна-Таккера, составленной при предыдущей гипотезе относительно $I(x^*)$. Возможно три основных случая. В первом случае система может оказаться несовместимой, тогда нужно изменить множество $I(x^*)$. Во втором случае полученное значение x^* может нарушить некоторые из ограничений, которые считались неактивными в точке решения. В этом случае нарушенные ограничения или часть из них следует ввести в число предполагаемых активных. В третьем случае некоторые множители λ_i могут оказаться отрицательными. В этом случае при смещении с таких ограничений внутрь области функция $Q(x)$ будет локально убывать, следовательно, их надо вывести из числа предполагаемых активных.

Пример 1.

Разберем задачу с двумя переменными, в которой нужно найти $\min(x_1^2 + 19x_2x_1 + 100x_2^2)$ при следующих ограничениях: $x_1 \le 1$; $x_2 \ge 1$; $x_2 \ge -4-x_1$; $x_2 \ge -11-2x_1$.

Приведем задачу к стандартному виду, выбрав $Q(x) = x_1^2 + 19x_1x_2 + 100x_2^2$, $g_1(x) = x_1 + 1$, $g_2(x) = 1 - x_2$, $g_3(x) = -4-x_1-x_2$, $g_4(x) = -11 - 2x_1 - x_2$, и проанализируем ее свойства. Все функции ограничений-неравенств $g_i \le 0$ $(i = \overline{1,4})$ линейны, а , значит, выпуклы, поэтому допустимая область D в задаче выпукла. Более того, если взять, например, точку $(x_1,x_2) = (-2, +2)$, то эта точка будет допустимой и все неравенства в ней будут выполняться строго. Используя достаточное условие регулярности Слейтера, можно утверждать, что область D будет регулярна во всех своих точках, следовательно, в условиях Куна-Таккера $\lambda_o \neq 0$ и его можно принять равным единице.

Для проверки выпуклости функции Q запишем для нее матрицу вторых производных

$$G_Q = \begin{pmatrix} 2 & 19 \\ 19 & 200 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 400-19^2 > 0$.

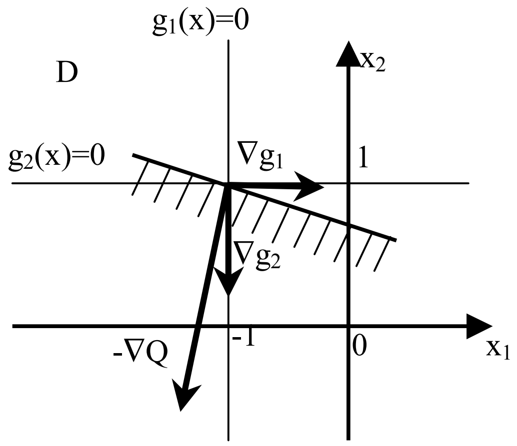
По критерию Сильвестра матрица положительна определена; по критерию выпуклости дважды непрерывно дифференцируемых функций ***Q(x)*** является выпуклой.Таким образом, условия Куна-Таккера будут необходимыми и достаточными условиями,определяющими решение задачи. Для того, чтобы воспользоваться ими, необходимо принять гипотезу о наборе активных в точке решения ограничений-неравенств. Выпишем градиенты функций задачи

$$\nabla Q=\begin{pmatrix} 2x_1+19x_2 \\ 19x_1+200x_2 \end{pmatrix};\ \nabla g_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \nabla g_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \nabla g_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix};\ \nabla g_4=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Предположим вначале, что $I(x^*)=\varnothing$. Условия экстремума примут вид $\nabla Q(x_1x_2)=0$, что даст точку

функции ***Q(x).*** В ней нарушаются ограничения ***1*** и ***2***.

Включим их в число активных, приняв гипотезу $I(x^*)=\{1,2\}$. Система условий Куна-Таккера будет



иметь вид $\begin{cases} -2x_1-19x_2=\lambda_1 \\ -19x_1-200x_2=-\lambda_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+1=0 \\ 1-x_2=0 \end{cases}$

Из нее $x_1=-1$, $x_2=1$, $\lambda_1=-17<0$, $\lambda_2=181>0$. На рисунке приведено взаимное расположение ∇Q, ∇g_1 и ∇g_2 в найденной точке.

Штриховкой отмечено открытое полупространство направлений строгого локального убывания функции ***Q*** в точке ***(-1,1)***. Очевидно, что можно, не покидая ограничения $g_2(x)=0$, уйти с границы $g_1(x)=0$ (соответствующей $\lambda_1<0$), уменьшив значение ***Q(x)***. Поэтому исключим 1-е ограничение из числа активных.

Примем гипотезу $I(x^*)=\{2\}$. Получим новую систему условий Куна-Таккера

$$\begin{cases} -2x_1-19x_2=0 \\ -19x_1-200x_2=-\lambda_2 \end{cases} \qquad 1-x_2=0.$$

Решая, находим $x_1=-19/2$; $x_2=1$; $\lambda_2=19^2/2+200>0$.

Эта точка допустимой не является, т.к. в ней нарушаются ограничения $g_3(x)\le 0$ и $g_4(x)\le 0$.

Одновременно оба включить в число активных нельзя, поскольку система условий окажется несовместной. Очевидно, что активным следует считать 3-е ограничение.

Примем гипотезу $I(x^*)=\{2,3\}$. Система условий примет вид

$$\begin{cases} -2x_1-19x_2=-\lambda_3 \\ -19x_1-200x_2=-\lambda_2-\lambda_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-x_2=0 \\ -4-x_1-x_2=0 \end{cases}.$$

В результате получаем $x_1=-5$, $x_2=1$, $\lambda_2=96>0$, $\lambda_3=9>0$. Остальные ограничения в найденной точке выполняются, следовательно, ***(-5,1)*** - глобальный минимум задачи.

Рассмотрим еще один пример, в котором минимизируемая функция не является выпуклой.

Пример 2.

Пусть требуется найти глобальный минимум в задаче

$\min\ \{x_1, x_3 : x\in D\}$, $D=\{x\in R^3: x_2\ge 1-x_2,\ x_1-2\le x_3,\ x_2+x_3=2\}$.

Допустимая область ***D*** задана линейными ограничениями, равенствами и неравенствами, и является выпуклой. Более того, нетрудно подобрать такую допустимую точку, например, $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, что неравенства выполняются строго, следовательно, для области ***D*** выполнено достаточное условие регулярности Слейтера. Это значит, что в условиях Куна-Таккера всегда можно считать $\lambda_o=1$.

Поскольку главные миноры матрицы вторых производных обращаются в нули, то по критерию Сильвестра нельзя выяснить знакоопределенность матрицы $\Gamma_Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Подсчитав собственные числа, видим, что $\lambda 1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm 1$. Следовательно, матрица Г не является неотрицательно определенной, то минимизируемая функция не выпукла. Поэтому условия Куна-Таккера не будут достаточными, а только лишь необходимыми. В этом случае придется искать все точки, где эти условия выполняются, и затем, сравнивая значение функции в этих точках, определять глобальный минимум.

В рассматриваемой задаче для упрощения решения можно, используя связь $x_2 + x_3 = 2$, исключить x_2 из ограничений. Тогда задача примет вид:

$$\min \{x_1 x_3 : x \in D_2\},\ D_2 =\{ (x_1,x_3) \in R^2 : x_3 - x_1 \le 1,\ x_1 - x_3 \le 2\}.$$

Поскольку в пространстве переменных x_1,x_3 матрица вторых производных минимизируемой функции новой задачи $\Gamma=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm 1$, то поверхность $z = x_1 x_3$ является седловой и функция не имеет конечных безусловных минимумов.

При этом либо минимума вообще нет, либо он достигается на границах области. Поскольку допустимая область в задаче не ограничена, вопрос о существовании минимума должен быть специально исследован.

Проведем исследование. Вдоль прямых $x_1 - x_3 = c\ (1 \le c \le 2)$, параллельных границам области, функция $Q(x)$ имеет положительную вторую производную

$$\frac{\partial^2 Q(x)}{\partial V^2} = V^T \Gamma V = (1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0,$$

где $V = (1,1)$-направление вдоль прямой. Отсюда и из квадратичного вида функции Q следует существование конечного минимума в задаче.

Исследуем границу $x_3 - x_1 = 1$. Система условий Куна-Таккера примет вид:

$$-x_3 = \lambda_1,\quad x_3 - x_1 = 1$$
$$-x_1 = \lambda_1,\quad \lambda_1 \ge 0,$$

где λ_1- множитель Лагранжа.

Они выполняются при $x_1 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}5$; $\lambda_1 = 0{,}5$. Значение функции равно $-0{,}25$.

Исследуем границу $x_1 - x_3 = 2$. Для нее имеем следующую систему необходимых условий локального минимума:

$$-x_3 =\lambda_1,\qquad x_1 - x_3 = 2$$
$$-x_1 =-\lambda_1,\qquad \lambda_1 \ge 0.$$

Они выполняются при $x_1 = +1,\ x_3 = -1,\ \lambda_1 = 1$. Значение функции равно -1, т.е. меньше, чем в первой найденной точке. Следовательно, глобальный минимум вспомогательной задачи достигается в точке $x_1 = 1,\ x3 = -1$, а для исходной задачи - в точке $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Для задачи

$$\min \{10(x_1-3{,}5)^2 + 20(x_2 -4)^2 :\ x \in D\},\ D =\{ x \in R^2 : x_1 + x_2 \le 6;\ x_1 - x_2 \le 1;\ 2x_1 + x_2 \ge 6;\ 0{,}5x_1 - x_2 \ge -4\}$$

начертите на плоскости (x_1,x_2) вид области D. В ее угловых точках постройте внешние нормали к границам, а также вектор $-\nabla Q(x)$. Используя геометрическую трактовку условий Куна-Таккера, ответьте на вопрос: может ли точка глобального минимума располагаться в одной из вершин? На основе полученных результатов сделайте выводы о возможном положении точки условного минимума. Проверьте Ваши предположения с помощью теоремы Куна-Таккера, найдите решение.

2. Используя геометрические представления, укажите точку минимума в задаче

$$\min \{x_2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1;\ -x_1 + x_2^2 \le 0;\ x_1 + x_2 \ge 0\}.$$

Обоснуйте полученные результаты с помощью условий Куна-Таккера.

3. Проверьте выполнение условий Куна-Таккера в точках $(0,2)$, $(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(1,0)$, $(0.05,0)$ для задачи

$$\min\{10x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 + 2x_2 -10 : x \in D\}$$

$$D = \{x \in R^2: 2x_1^2 + x_2^2 \le 4; x_1 + x_2 \le 4; x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0\}.$$

4. Найдите расстояние от начала координат до выпуклого множества

$$D = \{ x \in R^2: x_1^2 - x_2^2 \ge 4; x_1 \ge 0\}.$$

Обоснуйте результат с использованием теоремы Куна-Таккера.

5. Найдите проекцию произвольной точки y на множество $D = \{ x \in R^2: x_1 \cdot x_2 \ge 4;\ 2x_1 + x_2 \ge 5\}$. Дайте геометрическую трактовку условиям неотрицательности множителей Лагранжа.

6. Найдите проекцию произвольной точки $x \in R^n$ на следующие множества:

- параллелепипед $a_i \le x_i \le b_i\ (i = \overline{1,n})$;
- шар $\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 \le r^2$;
- конус $x_n^2 \ge \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$; $x_n \ge 0$.

7. Найдите минимум функции $6x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 9x_1 - 3x_2 + x_3^2 - x_3$ при ограничениях

$$x_1 - x_2 \ge -3,\ -x_1 + 5x_2 \ge 15,\ 0 \le x_1 \le 5.$$

Как изменится решение, если добавить ограничение-равенство $x_1 + x_3 = 1$? Как изменится решение, если кроме ограничения-равенства добавить еще одно дополнительное неравенство $10x_2 \le x_1 - 1$?

8. Проверьте выпуклость и регулярность области $D = \{(x_1,x_2): 0 \le x_2 \le x_1^3\}$. Найдите решение задачи:

$$\min\{ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 : x \in D\}.$$

Указание: если предположить, что активно одно ограничение $x_2 \le x_1^3$, то может возникнуть проблема с аналитическим определением значения множителя Лагранжа. Попробуйте оценить его знак без явного вычисления.

9. Найдите решения следующих задач:

$$\max\{ 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} : x_1 + x_2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\};$$

$$\max\{ 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 3\sqrt{x_3} : x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1,3})\};$$

$$\max\{\alpha_1\sqrt{x_1} + \dots + \alpha_n\sqrt{x_n} : x_1 + \dots + x_n \le 1,\ x_i \ge 0\ (i = \overline{1,n})\},$$ где $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.

10. Найдите минимум функции

$x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 + x_3^2$ при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + x_3^2 \le 6,\ x_1 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

11. Решите задачу: найти

$$\min\{3x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 13x_1 - 22x_3 - 10\}$$

при ограничениях

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 2,\ x_1^4 + 2x_2 + x_3 \le 3,\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 \le 5,\ x_1 - 2x_3 = -1,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

12. Найдите минимум функции $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2$ в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 при ограничениях $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

13. Решите задачу определения минимума функции

$$24x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_3 - 12x_3 + 36x_1 - x_2$$

в области R^3, порожденной следующими ограничениями: $3 + x_1 - x_3 \ge 0,\ 0 \le x_1 \le 2,$

$$15 + x_1 \le 5x_3,\ 2x_1 + x_2 = 2.$$

14. Найдите глобальный минимум в задаче

$$\min\{ 5x_1^2 + 9x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 : x \in D\}$$

$$D = \{ x \in R^3 : (4x_1 + 4x_2 \ge 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 1,\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}.$$

15. Найдите

$$\min\{ x_1^2 + 0{,}5x_2^2 + 0{,}5x_3^2 - x_1x_3 - 7x_1 + x_3 - 5x_2\}$$

при ограничениях

$$x_3 - 0{,}5x_1 \le 1,\ -x_1 + 5x_3 \ge 10,\ 5 \le x_1 \le 8,\ x_1 + x_2 = 1.$$

16. С использованием теоремы Куна-Таккера докажите, что из всех треугольников с общим углом при вершине и заданной суммой длин боковых сторон равнобедренный треугольник имеет наименьшее основание.

17. В углах прямоугольной заготовки с размерами A на B вырезают квадраты с размерами x на x. Из оставшейся части собирают коробку. Определите значение x, при котором объем коробки максимален.

18. Найдите разложение положительного числа R на N вещественных сомножителей так, чтобы их сумма была минимальной.

19. Рассмотрите задачу о ритмичности производства (задачу №11 из раздела 1), предполагая, что сырье не является штучным, т.е. значения x_i не целочисленны. Решите задачу при следующих значениях параметров: $N = 5, E_o = 5, E = 5, A = 15, P_1 = 6, P_2 = 5, P_3 = 3, P_4 = 1, P_5 = 4;$ а также при $N = 5, E_o = 1, E = 3, A = 15, P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 5, P_4 = 5, P_5 = 4$.

20. Найдите глобальные минимумы в задаче

$$\min \{3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 : x \in D\}$$

$$D = \{ x \in R^2 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1, x_1 \geq -2, x_2 \geq 0\}.$$

21. Решите задачу определения глобальных минимумов функции $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3$ при следующих ограничениях: $1 - x_1 \leq x_3 \leq 2 - x_1, x_1 = x_2 - x_3$.

22. Найдите глобальный минимум в задаче

$$\min \{x_1^2 + 2x_1x_3 - x_3 : x \in D\}$$

$$D = \{x \in R^4 : x_1 + x_4 = 4, x_2 + x_3 = 8, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

Обоснуйте его единственность.

3. ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Пусть $I[y(.)]$ -интегральный функционал, заданный на некотором классе Y допустимых функций $y(x)$. Множество Y является открытым множеством. Функция $y^*(x)$ из Y называется глобальным минимумом (максимумом) функционала $I[y(.)]$, если $I[y^*(.)] \leq I[y(.)]$ для всех $y \in Y$.

Для определения локального экстремума необходимо ввести расстояние (норму) в множестве Y. В вариационном исчислении чаще всего используют расстояние $\rho_o(y_1,y_2) = \max\limits_{x\in[x_0,x_1]} \left|y_1(x) - y_2(x)\right|$ (сильное расстояние) и $\rho_1(y_1,y_2) = \max\limits_{x\in[x_0,x_1]} \left|y_1(x) - y_2(x)\right| + \max\limits_{x\in[x_0,x_1]} \left|y_1'(x) - y_2'(x)\right|$ (слабое расстояние).

Соответственно определяется 2 вида локальных экстремумов. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $y \in Y$ таких, что $\rho_o(y^*,y) < \varepsilon$ / $\rho_1(y^*,y) < \varepsilon$ / имеет место $I[y^*(.)] \geq I[y(.)]$, то на $y^*(x) \in Y$ достигается сильный (слабый) локальный минимум (максимум). Поскольку $\rho_1(y^*,y) \geq \rho_o(y^*,y)$, то если на y^* достигается сильный экстремум, то, тем более, достигается и слабый. Глобальный экстремум является одним из локальных.

Для получения необходимых условий экстремума функционала рассматривается произвольное однопараметрическое семейство кривых $y(x,\alpha)$, удовлетворяющих тем же условиям гладкости и тем же граничным условиям, что и допустимые кривые, и такое, что кривая $y_o(x)$, для которой вычисляется вариация функционала, погружена в это семейство при $\alpha = 0$. Тогда первой вариацией функционала $I[y(.)]$ называется $\frac{d}{d\alpha} I\,[y(x,\alpha)]\,\Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha$. Необходимым условием экстремума (любого - сильного или слабого локального, глобального) является обращение в ноль его первой вариации. Это условие аналогично необходимому условию локального экстремума дифференцируемой функции.

Простейшая вариационная задача.

Пусть $I[y(.)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))dx,$ где $y \in Y$,

$Y = \{ y = y(x) : y(x) \in C^2[x_o,x_1]\,,\, y(x_o) = y_o,\, y(x_1) = y_1\}$, а функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Для того, чтобы на функции $y(x)$ достигался экстремум функционала, необходимо,чтобы $y(x)$ удовлетворяла уравнению Эйлера:

$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Интегральные кривые уравнения Эйлера являются экстремалями. Свойство кривой быть или не быть экстремалью не зависит от выбора системы координат (это означает инвариантность уравнения Эйлера относительно выбора переменных).

Уравнение Эйлера - нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных; в общем случае оно не интегрируется. Отметим важные частные случаи. Если F явно не зависит от y, то имеется первый интеграл $\partial F/\partial y' = C$; если F явно не зависит от x, то есть первый интеграл $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$; если F не зависит от y',то уравнение Эйлера не является дифференциальным уравнением и в общем случае не существует функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Если же F зависит только от y', то экстремалями являются прямые $y = C_1x + C_2$.

Пусть найдены кривые, удовлетворяющие уравнению Эйлера и граничным условиям $y(x_o) = y_o$, $y(x_1) = y_1$. Решена ли задача? Нет, поскольку выполнение уравнения Эйлера является лишь необходимым условием экстремума: *"каждый понимает разницу между арестом подозреваемого и фактическим доказательством его виновности"* . Если не решен вопрос о существовании решения, то нет смысла и говорить о необходимых условиях. Если же существование решения экстремальной задачи именно в этом классе допустимых кривых доказано, то экстремум может достигаться лишь там, где выполнены необходимые условия (в случае простейшей вариационной задачи - только на гладких экстремалях, удовлетворяющих заданным граничным условиям). Во всех рассмотренных ниже задачах можно доказать существование решения.

Отметим роль $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Задачи, где эта производная отлична от нуля, называются регулярными. Условие $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ исключает возможность излома экстремалей. Кроме того, имеет место необходимое условие Лежандра: если на $y^*(x)$ достигается минимум функционала,то $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ $(x,y^*(x)),y^{*/}(x) \geq 0$ при $x \in [x_o,x_1]$.

Если $y(x)$ - вектор-функция $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, то при аналогичных условиях для F и фиксированных граничных условиях необходимое условие экстремума состоит в выполнении системы n уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \ (i = \overline{1,n}).$$

Если $F = F(x,y,y', \ldots, y^{(m)})$, то при аналогичных условиях для F и фиксированных граничных условиях $y(x_i)\ y_i$; $y'(x_i) = y'_i, \ldots, y^{(m-1)}(x_i) = y_i^{(m-1)}$, $(i = 0,1)$ необходимое условие экстремума состоит в выполнении уравнения Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial F}{\partial y^m} = 0.$$

Для функционала вида $I[z(x,y)] = \iint\limits_D F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$,где $z(x,y)$ - гладкие поверхности, удовлетворяющие на границе множества D условно $z\big|_{\partial D} = f(x,y)$,необходимое условие экстремума имеет вид $\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y'} = 0$ (уравнение Эйлера-Остроградского).

Пример 1. Задача о движении яхты против ветра.

Пусть на безграничном водном пространстве дует постоянный по величине и направлению ветер, вектор скорости которого параллелен вектору, направленному из точки $\boldsymbol{B}$ в точку $\boldsymbol{A}$. Найти способ передвижения яхты, при котором она за наименьшее время сможет перейти из точки $\boldsymbol{A}$ в точку $\boldsymbol{B}$.

Запишем математическую модель этой задачи. Время перехода яхты из точки $A(x_0,0)$ в точку $B(x_1,0)$ описывается функционалом $\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}$dx, где v - скорость яхты по курсу, т.к. $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx$.

Яхтсмены считают, что $v=v(y')$. Требуется найти глобальный минимум этого функционала. Здесь F=$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}$=F(y'), т.е. гладкими экстремалями в этой задаче являются прямые. На единственной прямой $\boldsymbol{AB}$, соединяющей начало и конец движения, очевидно, не может достигаться минимум времени перехода. Отсюда следует, что поставленная задача решения в классе гладких кривых не имеет. Будем искать ее решение в классе кусочно-гладких кривых с конечным числом угловых точек. Поскольку на каждом участке гладкости искомая кривая должна удовлетворять уравнению Эйлера, то искомый путь яхты состоит из прямолинейных отрезков, т.е. яхта должна двигаться галсами.

Задача решена лишь качественно. Если мы хотим получить аналитический результат, то надо записать зависимость $v(y')$ и использовать условия Вейерштрасса-Эрдмана.

Пример 2. Найти экстремум функционала

$I[y(x),z(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} xz^2(2yz + xzy' + 3xyz')dx$ в классе гладких кривых, проходящих через точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

В этой задаче экстремум может достигаться лишь на функциях ***y(x)*** и ***z(x)***, удовлетворяющих системе уравнений Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$; $\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}=0$, т.е.

$$2xz^3+3x^2z^2z' - \frac{d}{dx}(x^2z^3) \equiv 0;\ 6xyz^2+3x^2z^2y'+6x^2yzz' - \frac{d}{dx}(3x^2yz^2)\equiv 0\ .$$

Следовательно, любая допустимая кривая является экстремалью. Этот результат легко понять, если увидеть, что исследуемый функционал описывает работу силового поля $2xyz^3\bar{i}+x^2z^3\bar{j}+3x^2yz^2\bar{k}$ по перемещению точки из M_o в M_1. Это поле является потенциальным с потенциалом $u = x^2yz^3$; в этом случае работа не зависит от пути.

<u>Пример 3.</u> Задача Лопиталя: какова траектория световых лучей в атмосфере, где скорость распространения пропорциональна высоте?

Постановка этой задачи использует вариационный принцип Ферма в оптике: свет распространяется из одной фиксированной точки в другую по такому пути, время распространения по которому минимально. На основе этого принципа можно построить всю геометрическую оптику.

Рассмотрим плоскую задачу. Пусть источник расположен в точке $M_o(x_o,y_o)$, а наблюдатель - в точке $M_1(x_1,y_1)$, $y_o,y_1 > 0$. Как и в примере 1,

$$I[y(.)] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx.\ \text{Здесь } v = ky \quad (k>0).$$

Так как при всех k функционал достигает минимума на одной и той же кривой, то примем $k= 1$.

Функция $F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$ при $y \neq 0$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Задача регулярна, необходимое условие Лежандра выполнено, так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{1}{y\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ > 0 при $y > 0$. Мы пришли к простейшей вариационной задаче: найти глобальный минимум функционала в классе гладких кривых, соединяющих точки M_o и M_1. Так как F от x явно не зависит, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$,

т.е.

$$y\sqrt{1+y'^2}=C_1,\ 1+y'^2=C_1^{\,2}\big/y^2,\ y'=\pm\sqrt{C_1^{\,2}-y^2}\big/y\ .$$

Тогда $\frac{\pm\, ydy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}=dx$, $\mp\sqrt{c_1^2-y^2}=x+c_2$, $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$; т.е. экстремалями являются окружности, центры которых лежат на оси Ox. Через точки M_o и M_1 можно провести единственную окружность данного семейства.

Итак, мы нашли единственную допустимую кривую, на которой может достигаться минимум функционала. Можно показать, что экстремум существует. А так как он может достигаться лишь на экстремали, проходящей через точки M_o и M_1, то эта экстремаль и является решением поставленной задачи.

Через два века после Лопиталя А.Пуанкаре на основе этой задачи построил модель плоскости Лобачевского.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

<u>Задача Лагранжа</u> ставится следующим образом: требуется найти экстремум функционала

$$I[y_1(.),\dots,y_n(.)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')dx$$

в классе гладких на $[x_o,x_1]$ кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям и условиям связи $G_k(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n') = 0$, $k=\overline{1,m}$, $m<n$.

Если G_k не зависят от $y_1',..,y_n'$, то связи называются голономными. В этом случае условия связи означают, что допустимые кривые лежат на поверхностях $G_k = 0$.

Эта задача сводится к задаче на безусловный экстремум вспомогательного функционала: если кривая $y_1(x),...,y_n(x)$ доставляет экстремум функционалу I при условиях $G_k = 0$, т о существуют множители Лагранжа $\lambda_k(x)$ такие, что на этой кривой достигается безусловный экстремум функционала

$$I[y_1(.),...,y_n(.)]=\int_{x_0}^{x_1} (F(x,y_1,...,y_n,y_1',..,y_n')+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(x)\, G_k(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n'))dx$$

Изопериметрическая задача имеет следующую постановку: найти экстремум функционала

$$I[y_1(.),...,y_n(.)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,..,y_n,y_1',..,y_n')dx$$

в классе гладких на $[x_o,x_1]$ кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям, при условии, что другой функционал принимает заданное постоянное значение:

$$I_0[y_1(.),...,y_n(.)]=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx=l.$$

Аналогично задаче Лагранжа изопериметрическая задача сводится к задаче на безусловный экстремум вспомогательного функционала

$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} (F + \lambda G)dx$, где $\lambda = const$. При этом предполагается, что $y_1(x),...,y_n(x)$ не является экстремалью функционала I_o.

***Пример** 4.*

Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$. Геодезические линии - это линии наименьшей длины, соединяющие две заданные точки поверхности. Задача сводится к нахождению глобального минимума функционала $I_1=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ при условии, что кривые, проходящие через точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$, лежат на поверхности цилиндра. Это - задача Лагранжа с голономными связями. Задачу удобнее решать в цилиндрических координатах r, φ, z. Тогда функционал имеет вид

$$I=\int_{M_0}^{M_1}\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2}=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+r_\varphi'^2+z_\varphi'^2}\,d\varphi\,.$$

Уравнение связи: $r=R(const)$.

Составляем вспомогательный функционал

$$I_1=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\sqrt{r^2+r_\varphi'^2+z_\varphi'^2}+\lambda(\varphi)(r-R))d\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}F_1(\varphi,r,z,r_\varphi',z_\varphi')d\varphi$$

и решаем для него задачу о нахождении глобального минимума.

Необходимое условие экстремума: $\dfrac{\partial F_1}{\partial r}-\dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{\partial F_1}{\partial r_\varphi'}=0$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial F_1}{\partial z_\varphi'}=0\text{, т.е. }\frac{r}{\sqrt{r^2+r_\varphi'^2+z_\varphi'^2}}+\lambda(\varphi)-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_\varphi'}{\sqrt{r^2+r_\varphi'^2+z_\varphi'^2}}\right)=0,$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{z_\varphi'}{\sqrt{r^2+r_\varphi'^2+z_\varphi'^2}}\right)=0.$$

Так как $r_\varphi'=0$, из второго уравнения $\dfrac{z_\varphi'}{\sqrt{R^2+z_\varphi'^2}}=c$,

$$z_\varphi'=c\sqrt{R^2+z_\varphi'^2}\,,\ z_\varphi'=\pm\frac{cR}{\sqrt{1-c^2}}=c_1 \text{ (при } c^2\neq 1\text{), } z=c_1\varphi+c_2.$$

При $c^2 = 1$ $z'^2= R^2 + z'^2$, что возможно только при $\dfrac{d\varphi}{dz}=0.$

Кроме того, есть уравнение связи $r = R$.

Экстремалями задачи являются винтовые линии. Через точки M_o и M_1 (при $z_o \neq z_1$) можно провести бесчисленное множество винтовых линий, отличающихся друг от друга числом оборотов вокруг цилиндра. В этой задаче наглядно видно, что выполнение уравнения Эйлера - необходимое условие <u>*локального*</u> экстремума. Можно показать, что на каждой из этих винтовых линий достигается локальный минимум функционала; глобальный минимум реализуется на той винтовой линии, для которой $|\varphi_0 - \varphi| < 2\pi$. При $\varphi_o = \varphi_1$ это будет отрезок прямой, соединяющей точки M_o и M_1.

<u>Пример 5.</u>

Найти минимум функционала $I[y(.)] = \int_0^1 y'^2 dx$ в классе гладких

кривых, удовлетворяющих условиям $y(o) = y(1) = 0,\ \int_0^1 y^2 dx = 1$.

Эта изопериметрическая задача сводится к нахождению безусловного экстремума вспомогательного функционала

$$I[y(.)]= \int_0^1 (y'^2 + \lambda y^2)dx$$

в классе гладких кривых, удовлетворяющих условию $y(0) = y(1) = 0$.

Уравнение Эйлера $2\lambda y - 2\frac{d}{dx} y' = 0$; $y'' - \lambda y = 0$. Получим краевую задачу. При $\lambda \geq 0$ она имеет только

тривиальные решения, не удовлетворяющие условию $\int_0^1 y^2 dx = 1$. При $\lambda < 0$ $y = c_1 sin\sqrt{-\lambda}\, x + c_2 cos\sqrt{-\lambda}\, x$.

Из граничных условий $c_2 = 0$; $c_1 sin\sqrt{-\lambda} = 0$; а т.к. $c_1 \neq 0$ (в противном случае получим тривиальное решение), то для множителя Лагранжа λ получаем условие $\sqrt{-\lambda_n} = \pi n$, $\lambda_n = -\pi^2 n^2$. Тогда $y_n = c_n sin(\pi nx)$.

Коэффициенты c_n определяются из условия $\int_0^1 y^2 dx = 1$:

$$\int_0^1 c_n^2 \sin^2(\pi nx)dx = c_n^2 \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi nx)}{2}dx = \frac{c_n^2}{2} = 1,\ c_n = \pm\sqrt{2}\ .$$

Итак, найдено счетное множество экстремалей $y_n = \pm\sqrt{2}\ sin(\pi nx)$.

Вычисляя $\int_0^1 y_n'^2 dx$, убеждаемся, что $I[y_n(x)]$ принимает наименьшее значение при $n = 1$:

$$I[y_n(x)] = \int_0^1 2(\pi n)^2 cos^2(\pi nx)dx = (\pi n)^2.$$

Можно показать, что на $y = \sqrt{2}\ sin(\pi x)$ (и симметричной ей $y = -\sqrt{2}\ sin(\pi x)$ достигается глобальный минимум.

ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ.

В этих задачах концы допустимых кривых могут перемещаться по заданным кривым. В этом случае к необходимым условиям экстремума добавляются условия трансверсальности на подвижном конце - условия, связывающие угловые коэффициенты экстремали и граничной кривой, показывающие, как экстремаль должна подходить к граничной кривой.

Для плоского случая условия трансверсальности имеют вид

$$\left[\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial T}{\partial x}\right]\Bigg|_{T(x,y)=0} = 0\,,$$

где T(x,y)=0 -неявное задание кривой, по которой перемещается конец допустимой кривой.

В частности, если значения допустимых функций на границе не подчинены никаким условиям (т.е. конец движется по прямой $x = const$), то на подвижном конце выполняется естественное граничное условие $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Если конец движется по прямой $y = const$, то на нем $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Если граничная кривая задана в явном виде $y = f(x)$, то условие трансверсальности имеет форму

$$\left. \left(F + (f' - y')\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right|_{y=f(x)} = 0.$$

В случае $F(x,y,y') = A(x,y)\sqrt{1+y'^2}$ условия трансверсальности задают условия ортогональности экстремали с граничной кривой: $y' \times f' = -1$.

Пример 6.

Найти гладкую кривую OA длины l, проходящую через начало координат, кончающуюся на прямой $y = h$ и образующую вместе с ординатой точки A и осью Ox наибольшую площадь.

В этой задаче требуется найти максимум функционала $I[y(.)] = \int_0^{x_1} y(x)dx$ в классе гладких кривых, левый конец которых закреплен: $y(0) = 0$, правый конец лежит на прямой $y = h$, а функционал $I_0[y(.)] = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx$ принимает заданное значение l.

Решаем эту изопериметрическую задачу методом множителей Лагранжа. Вводим вспомогательный функционал $I_1[y(.)] = \int_0^{x_1} (y + \lambda_1\sqrt{1+y'^2})dx$ и решаем для него задачу на безусловный экстремум. Запишем необходимые условия. Так как $F_1 = y + \lambda_1\sqrt{1+y'^2}$ явно не зависит от x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'\frac{\partial F_1}{\partial y'} = c$. Мы будем искать такое его решение, которое на левом конце удовлетворяет условию $y(0) = 0$, а на правом конце - условию трансверсальности, которое для горизонтальной прямой $y = h$ имеет вид $F - y'\frac{\partial F_1}{\partial y'} = 0$. Таким образом, нам известно значение первого интеграла в одной точке (на правом конце). Тогда по определению первого интеграла во всех точках экстремали $F - y'\frac{\partial F_1}{\partial y'} = 0$.

$y + \lambda_1\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$; $y\sqrt{1+y'^2} + \lambda = 0$; $y' = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2 - y^2}}{y}$; $\pm\frac{ydy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} = dx$; $(x+c)^2 + y^2 = \lambda^2$.

Это-семейство экстремалей. Неизвестные c, λ, x_1 определяются из условий на концах: $y(o) = 0$, $y(x_1) = h$, и условия $\int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = l$.

Эти условия дают $c^2 = \lambda^2$, $(x_1 + c)^2 + h^2 = c^2$, $x_1 = -c \pm \sqrt{c^2 - h^2}$. Если искомую кривую рассматривать при $x > 0$ (при $x < 0$ будет симметричное решение), то так как окружность пересекает прямую $y = h$ в двух точках, то конец кривой - правая из двух возможных точек пересечения: $x_1 = -c + \sqrt{c^2 - h^2}$. Константу c, а вместе с ней и λ, находим из условия

$\int_0^{-c+\sqrt{c^2-h^2}} \sqrt{1+y'^2}dx = l$, где y' вычисляется вдоль экстремали и $\sqrt{1+y'^2} = -\frac{\lambda}{y}$ (из дифференциального уравнения экстремали). Так как $y > 0$ при $h>0$ (при $h < 0$ имеется симметричное решение), то $y=\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}$. Тогда $\lambda<0$, $c<0$, $\lambda=c$ и $\int\limits_0^{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-h^2}} \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2-(x+\lambda)^2}}dx=l$;

$-\lambda\arcsin\frac{x+\lambda}{|\lambda|}\Bigg|_0^{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-h^2}}=l$; $-\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{\lambda^2-h^2}}{\lambda}=\frac{l}{\lambda}$, т.е. λ-отрицательный корень этого трансцендентного уравнения. Величина λ определяет положение центра искомой окружности и ее радиус.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Решить следующие классические задачи вариационного исчисления (1-4).

1. Задача о брахистохроне (линии наибыстрейшего ската). В вертикальной плоскости даны точки ***A*** и ***B***. Определить путь, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело, начав двигаться из точки ***A***, достигнет точку ***B*** в кратчайшее время.

2. Задача о минимальной поверхности вращения. Найти плоскую кривую, соединяющую две заданные точки плоскости и лежащую выше оси ***x***, которая при вращении вокруг этой оси образует поверхность наименьшей площади.

3. Задача о цепной линии. Найти форму тяжелой однородной нерастяжимой нити, подвешенной за концы.

4. Задача Диодоны. Найти кривую заданной длины ***l***, проходящую через точки ***A*** и ***B*** оси ***x (AB < l)***, ограничивающую вместе с осью ***x*** наибольшую площадь.

5. Доказать, что линейный функционал ***I[y]*** = $\int\limits_{x_0}^{x_1}(P(x)y'+Q(x)y+R(x))dx$, где ***P(x),Q(x),R(x)*** - функции класса C^2, не имеет экстремумов в классе гладких функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

6. Найти форму мыльной пленки, натянутой на каркас, состоящий из двух параллельных дисков радиусов ***r*** и ***R***, центры которых соединены осью длины ***l***, ортогональной дискам.

Найти экстремали следующих функционалов (7-15).

7. $I[y(.)] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx;\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0.$

8. $I[y(.)] = \int\limits_{1}^{2} (xy'^2 + yy')dx;\ y(1) = 0,\ y(l) = 1.$

9. $I[y(.)] = \int\limits_{a}^{b} (2xy +(x^2 + e^y)y')dx;\ y(a) = A,\ y(b) = B.$

10. $I[y(.)] = \int\limits_{0}^{1} (e^y + xy')dx;\ y(0) = 0,\ y(1) = a.$

11. $I[y(.)] = \int\limits_{0}^{\pi} (y'^2 - y^2)dx;\ y(0) = 1,\ y(\pi) = -1.$

12. $I[y(.)] = \int\limits_{0}^{1} (2e^y - y^2)dx;\ y(0) = 1,\ y(1) = e.$

13. $I[y(.)]=\int\limits_{0}^{1} (y^2+2y'^2+y''^2)dx;\ y(0)=0, y(1)=0, y'(0)=1. y'(1)=-sh(1).$

14. $I[y(.)]=\int\limits_{a}^{b} (y + y'')dx; y(a)=y_0, y(b)=y_1, y'(a)=y_0'. y'(b)=y_1'.$

15. $I[y(.)]=\int\limits_{0}^{1} y''\, dx;\ y(0) = y(1) = 0,\ y/(0) = 1,\ y'(1)=0.$

16. Найти расстояние между:

а) точкой *(0,0)* и кривой $y=\frac{1}{x^2}$

б)параболой $y=x^2$ и прямой $y=x-5$

в)окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$.

Найти экстремали в следующих изопериметрических задачах (17-20).

17. $I[y(.)]=\int_0^1 y'^2\,dx;\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ \int_0^1 xy\,dx=0$

18. $I[y(.)]=\int_0^{\pi} y\sin x\,dx;\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi,\ \int_0^{\pi} y'^2dx=-3/2\pi$.

19. $I[y(.)]=\int_0^{l} y'^2dx;\ y(0)=y(l)=0,\ \int_0^{l} y^2dx=1.$

20. $I[y(.)]=\int_0^{1} (x^2+y'^2)dx;\ y(0)=y(l)=0,\ \int_0^{1} y^2dx=2.$

21. Найти геодезические линии на сфере радиуса R.

22. Найти кратчайшее расстояние между точками A(1,0,-1) и B(0,-1,1), лежащими на плоскости x+y+z=0.

4. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.

Дана управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x}_i=f_i(x,\ u(t)),\ i=\overline{1,n}$, где допустимые управления $u(t)\in U\subset R^m$ (U - множество значений допустимых управлений). Требуется перевести систему из начального состояния x_o в конечное состояние x_1 так, чтобы заданный функционал

$I=\int_{t_0}^{t_1} f_o(x,u)dt$ принимал наименьшее значение.

Составим функцию Гамильтона $H(\psi,x,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(x,u)$ где

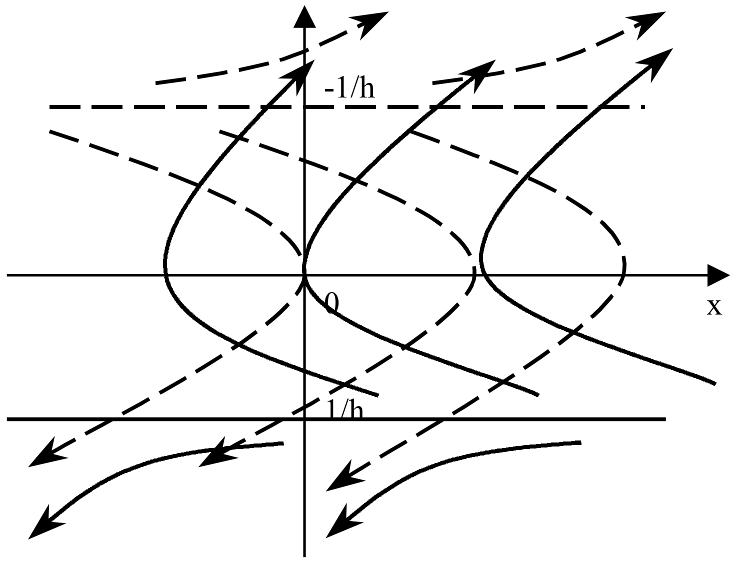
вспомогательные переменные ψ_i являются решением сопряженной системы $\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n}.$

Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина имеют вид: для оптимальности в смысле минимума функционала I процесса $u^o(t),\ x^o(t),\ t_o\le t\le t_1$, необходимо существование константы $\psi_0\le 0$ и такого нетривиального решения $\psi^o(t),\ t_o\le t\le t_1$, сопряженной системы, что для любого t, при котором $u^o(t)$ непрерывно, выполняется условие максимума: $H(x^o(t), J^o(t), u^o(t))=\max\limits_{u\in U} H(x^o(t),\psi^o(t),\ u)\equiv 0,\ t_o\le t\le t_1$, причем если $f_o>0$, то $\psi^o<0$.

Если конец $x_o(x_1)$ не фиксирован, а принадлежит некоторому многообразию M, то на этом конце выполняются условия трансверсальности: вектор $\psi(t_o)(\psi(t_1))$ ортогонален всем касательным векторам многообразия M в точке $x_o(x_1)$.

Важным классом задач являются задачи о быстрейшем попадании в начало координат по траекториям линейной системы $\dot{x}=Ax+Bu$, где область U является m-мерным выпуклым многогранником, удовлетворяющим условию общности положения: если w-вектор, параллельный любому ребру многогранника U, то векторы $Bw, ABw,\ldots,A^{n-1}Bw$ линейно независимы. В таких задачах принцип максимума Понтрягина для функции Гамильтона $H=\psi^T(Ax+Bu)$ является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

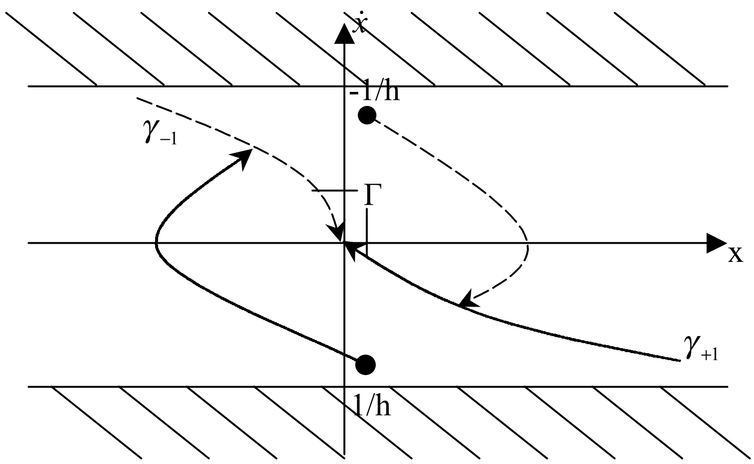
В качестве примера рассмотрим задачу о быстрейшем приведении в начало координат объекта, движение которого описывается уравнением $\ddot{x}$ + $h\dot{x}$ = $u(t)$, $|u(t)| \le 1$. Эту задачу можно интерпретировать как задачу о быстрейшем выведении судна на курс.



Изучим случай $h < 0$. Вначале рассмотрим, что будет при крайних значениях управления, при u=+1. На рисунке сплошными линиями начерчены траектории системы при u=+1,пунктиром - при u=-1. Если взять начальное состояние, расположенное вне полосы $|y| < |1/h|$, то для него не существует допустимой траектории, ведущей в начало координат, так как никакая допустимая траектория, начинающаяся вне этой полосы, не может попасть в эту полосу при возрастании t. Это происходит потому, что никакая траектория не может пересечь траектории системы с u = +1 снизу вверх. Верхняя граница этой полосы является траекторией системы с u =-1, а нижняя - траекторией системы с u =+1. Из точек, расположенных внутри этой полосы, можно придти в точку **0** (хотя бы по траекториям систем с $u=\pm 1$). Итак, задачу об отыскании оптимального управления можно решать лишь для точек множества управляемости - полосы $|y| < |1/h|$.

В этой задаче принцип максимума Понтрягина задает необходимые и достаточные условия оптимальности.

Составим функцию Гамильтона $H = \psi_1 y + \psi_2(-hy + u)$, где ψ_1, ψ_2 -решения сопряженной системы $\dot{\psi}_1 = -\partial H / \partial x = 0$, $\dot{\psi}_2 = -\partial H / \partial y = -\psi_1 + h\psi_2$. Так как u входит в H линейно с коэффициентом ψ_2, то $\max\limits_{|u|\le 1} H$ достигается при граничных значениях управления, причем знак $u_{опт}$ зависит от ψ_2 : $u_{опт}$ = $sign\,\psi_2(t)$. Решая сопряженную систему, получим: $\psi_1 = c_1$, $\dot{\psi}_2 = -c_1 + h\psi_2$, $\psi_2 = c_2e^{ht} - c_1/h$, откуда видно, что $\psi_2(t)$ может менять знак не более 1 раза. Следовательно, оптимальное управление может менять знак не более 1 раза. Мы пока знаем только качественную структуру оптимального управления и не знаем, при каких состояниях происходит перекладывание руля из одного крайнего положения в другое. Выясним этот вопрос. Целью управления является в точка **(0,0)**. В нее ведут лишь 2 траектории, удовлетворяющие принципу максимума: γ_{+1} и γ_{-1},



отвечающие граничным значениям управления u. Последний участок движения должен лежать на одной из них, т.е. кривая Г, состоящая из γ_{+1} и γ_{-1}, является линией переключения. Решение задачи синтеза оптимальных управлений(нахождение оптимального управления как функции состояния системы) существует лишь при $|x| < |1/h|$ и имеет следующий вид:

$$U_{опт} = \begin{cases} +1 & \text{ниже } Г \text{ и на } \gamma_{+1} \\ -1 & \text{выше } Г \text{ и на } \gamma_{-1} \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти область управляемости и осуществить синтез оптимальных управлений в задаче о быстродействии для линейной системы $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = u(t)$, где $-1 \le u(t) \le +1$, в следующих случаях:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$;

3) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$;

4) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$;

5) $Re\,\lambda_1 > 0,\ Re\,\lambda_2 < 0$;

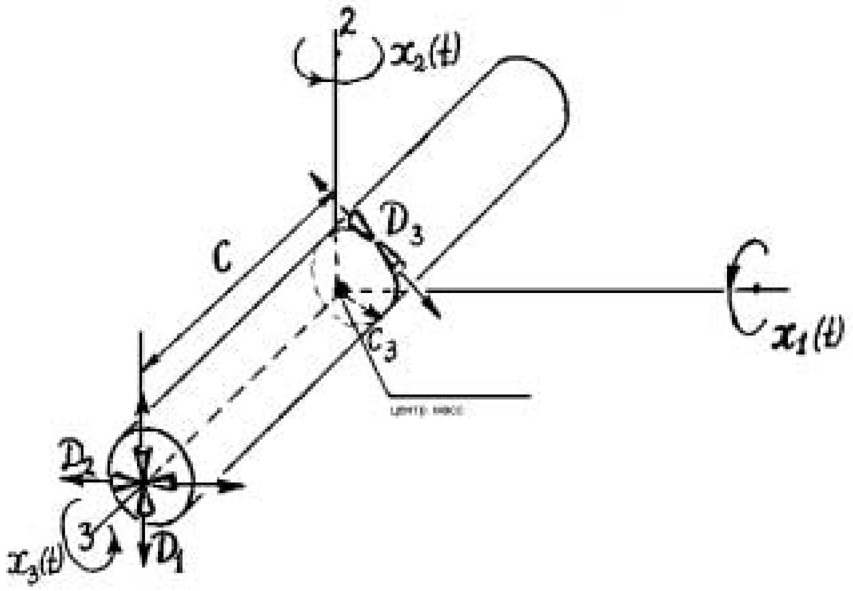
6) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$;

7) $Re\,\lambda_1 > 0,\ Re\,\lambda_2 > 0$

(здесь λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$).

2. Оптимальное управление гармоническим осциллятором с помощью 2-х независимых управлений.

Рассмотрим вращающийся космический летательный аппарат с единственной осью симметрии. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ - угловые скорости (в рад/сек) относительно 3-х основных осей тела; I_1, I_2, I_3 - моменты инерции относительно тех же осей; D_1, D_2, D_3 - реактивные двигатели, которые жестко прикреплены к аппарату и могут развивать тягу в обоих направлениях; сила тяги этих двигателей ограничена по величине.



Требуется найти оптимальный закон управления тягой двигателей D_1 и D_2 так, чтобы при постоянной скорости $x_3(t)$ скорости $x_1(t)$ и $x_2(t)$ сделать равными нулю за наименьшее время. Осуществить синтез оптимальных управлений.

3. Оптимальное управление демпфированным гармоническим осциллятором с помощью двух независимых управлений.

Найти оптимальный по быстродействию закон управления в начало координат для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + u_1(t), \\ \dot{y} = -x - y + u_2(t). \end{cases}$$

$|u_1(t)| \le 1,\ |u_2(t)| \le 1$. Осуществить синтез оптимальных управлений.

4. Для линейной системы второго порядка с двумя независимыми управляющими воздействиями найти оптимальный по быстродействию закон управления в начало координат и решить задачу синтеза:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},\ |u_1(t)| \le 1,\ |u_2(t)| \le 2$$

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4) A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Оптимальное управление объектом третьего порядка.

Для системы $\begin{cases} \dot{x} = ay - au(t) \\ \dot{y} = au(t) \\ \dot{z} = -az + au(t) \end{cases}$,

где $|u(t)| \le 1$, найти управление, переводящее систему в начало координат за наименьшее время. Решить задачу синтеза.

6. Решить задачу о быстрейшем попадании по траекториям системы $\ddot{x}$ = ***u(t)***, $|u(t)| \le 1$,

1) на отрезок ***[-1, +1]*** оси ***OX***;
2) на отрезок ***[-1, +1]*** оси ***OY.***

7. Найти управление, переводящее систему $\ddot{x}$ = ***u(t)***, $|u(t)| \le 1$ из начального состояния на квадратную окрестность начала координат $|x_1| \le a$, $|x_1| \le a$ за наименьшее время. Решить задачу синтеза.

8. Решить задачу, аналогичную задаче 7, для круглой окрестности начала координат $x_1^2 + x_2^2 \le R$ в двух случаях:
1) $R > 1$;
2) $R < 1$.

9. Рассмотрим одномерное управляемое движение (например, движение поезда) под действием ограниченной по величине силы тяги ***u(t)***. Считая, что затраты энергии за время ***T*** пропорциональны $\int_0^T |u|\, dt$, найти оптимальное управление, переводящее систему из начального состояния в начало координат таким образом, чтобы линейная комбинация времени перехода и энергетических затрат была бы минимальной. При решении задачи неровностью пути и сопротивлением пренебречь.

10. Решить задачу 9, считая, что энергетические затраты пропорциональны $\int_0^T u(t)dt$, с учетом сопротивления воздуха. Найти особый режим.

11. Решить задачу 9, считая, что энергетические затраты пропорциональны $\int_0^T \dot{x}(t)\, u(t)dt$, с учетом сопротивления воздуха. Найти особый режим.

12. Решить задачу об оптимальном управлении одномерной системой $\dot{x} = ax + u(t)$ в начало координат, минимизирующем квадратичный функционал $\int_0^T u^2(t)dt$.

13. Задача об оптимальном управлении тягой ракеты.

Пусть газы из сопла ракеты вылетают с постоянной скоростью ***C***. Сопло подвешено на оси, и направление выброса газов можно регулировать. В предположениях, что движение ракеты является плоским, происходит в безвоздушном пространстве и вектор ускорения свободного падения ***g*** является постоянным, найти оптимальное управление тягой ракеты $(a(t),u(t)),0 \le u(t) \le A$ максимизирующее: а) дальность полета ракеты; б) высоту подъема ракеты. Здесь $\alpha(t)$ - угол между горизонтом и прямой , вдоль которой происходит выброс газов в момент времени ***t***.

14. Задача о мягкой посадке при минимальном расходе горючего. Посадить космический корабль на планету с нулевой скоростью,используя минимальное количество горючего. Управлением является сила тяги двигателя $u(t),0 \le u(t) \le A$. Гравитационное ускорение вблизи планеты считаем постоянным.

15. Решить задачу 14 с учетом сопротивления. Найти особый режим управления.

16. Используя метод градиента, приближенно решить следующую задачу терминального управления:

$\ddot{x} = u, |u(t)| \le 1,$

$x_0=1, y_0=1,\ 0 \le t \le 3,$

$x^2(3)+y^2(3) \to \min.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.И.Неймарк. Динамические системы и управляемые процессы.М., Наука, 1978.

2. В.Г.Карманов. Математическое программирование.М., Наука, 1980.

3. Р.Беллман, С.Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. М., Наука, 1965.

4. Р.Арис. Дискретное динамическое программирование.М., Мир, 1969.

5. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. м., Наука, 1976.

6. М.Л.Краснов, Г.И.Макаренко, А.И.Киселев. Вариационное исчисление.М.:Наука, 1973,190с.

7. Сборник задач по математике для втузов. Часть 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения.М.:Наука, 1990, 302с.

8. В.М.Алексеев, Э.М.Галеев, В.М.Тихомиров. Сборник задач по оптимизации.М.:Наука, 1984, 287с.

9. И.Л.Калихман, М.А.Войтенко. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.:Высшая школа.1972.124с.

© ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сборник задач для практических занятий по курсу "Методы оптимизации"

Составители: Городецкий Станисав Юрьевич
Павлючонок Зоя Григорьевна
Савельев Владимир Петрович

2001 год

Подписано в печать .Формат 60x84 1/16.Бумага оберточная.
Печать офсетная. Усл.печ.л. - п.л.Тираж 350 экз.Заказ N

Бесплатно.

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского,
603600,ГСП-20, Н.Новгород, пр.Гагарина,23

Типография ННГУ,603000, Н.Новгород,ул.Б.Покровская,37.