Вариационное исчисление. Контрольная работа #3.

Трушанин Виталий / группа 8303 / Вариант #2

1. $J[x] = \int_0^1 \sin x' dt \quad x(0) = 0 \quad x(1) = \frac{p}{2}$

Для того, чтобы кривая $x(t)$ являлась экстремалью, необходимо, чтобы выполнялось уравнение Эйлера-Лагранжа $\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0 \right)$ на этой кривой.

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \sin x'}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sin x'}{\partial x'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \sin x'}{\partial x'} = a$$

$$\cos x' = a$$

$$x' = \arccos a$$

$$x = C_1 t + C_2 \quad (C_1 = \arccos a)$$

Из граничных условий найдём C_1, C_2:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x(1) = \frac{p}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{p}{2}$$

$$x(t) = \frac{p}{2} t$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = -\sin \dot{x}$$

Проверим необходимое условие Лежандра

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right|_{x = \frac{p}{2} t} = -\sin \frac{p}{2} = -1 < 0 \Rightarrow \text{максимум.}$$

Ответ: $x(t) = \frac{p}{2} t$ – экстремаль $J[x]$.

2. Найти экстремум функционала $J[x]=\int_0^p x'^2 dt \quad x(0)=2 \quad x(p)=0$ так, что функционалы $G_1[x]=\int_0^p x\cos t dt \quad G_2[x]=\int_0^p x\sin t dt$ принимают постоянные значения $G_1[x]=\frac{p}{2} \quad G_2[x]=p+2$.

Эта изопериметрическая задача эквивалентна задачи на безусловный экстремум следующего функционала:

$$I[x]=\int_0^p \left(x'^2+l_1 x\cos t+l_2 x\sin t\right)dt$$

где $l_1, l_2 = const$ – множители Лагранжа.

Для того, чтобы кривая $x(t)$ являлась экстремалью, необходимо, чтобы выполнялось уравнение Эйлера-Лагранжа $\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0\right)$ на этой кривой.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=l_1\cos t+l_2\sin t$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=2x'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=2x''$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0$$

$$l_1\cos t+l_2\sin t-2x''=0$$

$$2x''=l_1\cos t+l_2\sin t$$

$$x_{о.о.}=tC_1+C_2$$

$$x_{ч.н.}=A\sin t+B\cos t$$

$$x'_{ч.н.}=A\cos t-B\sin t$$

$$x'_{ч.н.}=-A\sin t-B\cos t$$

$$-2A\sin t-2B\cos t\equiv l_1\cos t+l_2\sin t\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{l_1}{2}\\ B=-\frac{l_2}{2}\end{cases}$$

$$x(t)=tC_1+C_2-\frac{l_1}{2}\sin t-\frac{l_2}{2}\cos t$$

Из граничных условий найдём C_1, C_2:

$$\begin{cases}x(0)=2\\ x(p)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_2-\frac{l_2}{2}=2\\ pC_1+C_2+\frac{l_2}{2}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{2+l_2}{p} \\ C_2 = 2 + \dfrac{l_2}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = -\frac{2+l_2}{p}t + 2 + \frac{l_2}{2} - \frac{l_1}{2}\sin t - \frac{l_2}{2}\cos t$$

Множители Лагранжа найдём из условий $G_1[x] = \dfrac{p}{2} \quad G_2[x] = x + 2$.

$$\int_0^p x\cos t dt = \frac{p}{2}$$

$$\int_0^p x\cos t dt = \int_0^p \left(-\frac{2+l_2}{p}t + 2 + \frac{l_2}{2} - \frac{l_1}{2}\sin t - \frac{l_2}{2}\cos t\right)\cos t dt =$$

$$= -\frac{2+l_2}{p}\int_0^p t\cos t dt + \left(2 + \frac{l_2}{2}\right)\int_0^p \cos t dt - \frac{l_1}{2}\int_0^p \sin t\cos t dt - \frac{l_2}{2}\int_0^p \cos^2 t dt$$

$$\int t\cos t dt = t\sin t - \int \sin t dt + C = t\sin t + \cos t + C$$

$$\int_0^p t\cos t dt = -2$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C$$

$$\int_0^p \cos t dt = 0$$

$$\int \sin t\cos t dt = \sin^2 t - \int \sin t\cos t dt + C \Rightarrow \int \sin t\cos t dt = \frac{\sin^2 t}{2} + C$$

$$\int_0^p \sin t\cos t dt = 0$$

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

$$\int_0^p \cos^2 t dt = \frac{p}{2}$$

$$\frac{4+2l_2}{p} - \frac{p l_2}{4} = \frac{p}{2}$$

$$l_2\left(\frac{2}{p} - \frac{p}{4}\right) = \frac{p}{2} - \frac{4}{p}$$

$$l_2\left(\frac{8-p^2}{4p}\right) = \frac{p^2-8}{2p}$$

$$l_2 = -2$$

$$\int_0^p x\sin t dt = x + 2$$

$$\int_0^p x\sin t dt = \int_0^p \left(-\frac{2+l_2}{p}t + 2 + \frac{l_2}{2} - \frac{l_1}{2}\sin t - \frac{l_2}{2}\cos t\right)\sin t dt =$$

$$= -\frac{2+l_2}{p}\int_0^p t\sin t dt + \left(2 + \frac{l_2}{2}\right)\int_0^p \sin t dt - \frac{l_1}{2}\int_0^p \sin^2 t dt - \frac{l_2}{2}\int_0^p \cos t\sin t dt$$

$$\int t\sin t dt = -t\cos t + \int \cos t dt + C$$

$$\int_0^p t\sin t dt = p$$

$$\int \sin t = -\cos t + C$$

$$\int_0^p \sin t dt = 2$$

$$\int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C$$

$$\int_0^p \sin^2 t dt = \frac{p}{2}$$

$$\int\limits_0^p \sin t \cos t dt = 0$$

$$p + 2 = -(2 + l_2) + (4 + l_2) - \frac{p l_1}{4}$$

$$l_1 = -4$$

$$x(t) = 1 + 2\sin t + 1\cos t$$

Проверим необходимое условие Лежандра

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\right|_{x=1+2\sin t+1\cos t} = 2 > 0 \Rightarrow \text{минимум.}$$

Ответ: $x(t) = 1 + 2\sin t + 1\cos t$ – экстремаль $J[x]$.

3. $J[x]=\int_0^1 x''^2 dt \quad x(1)=x'(0)=x(1)=0 \quad x(0)=1$

Для того, чтобы кривая $x(t)$ являлась экстремалью, необходимо, чтобы выполнялось уравнение Эйлера-Пуассона $\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)=0\right)$ на этой кривой.

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x''}=2x''$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)=2x^{(4)}$$

$$2x^{(4)}=0$$

$$x(t)=C_1t^3+C_2t^2+C_3t+C_4$$

Из граничных условий найдём C_1, C_2, C_3, C_4:

$$x(t)=C_1t^3+C_2t^2+C_3t+C_4$$

$$x'(t)=3C_1t^2+2C_2t+C_3$$

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ x(1)=0 \\ x'(0)=0 \\ x'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_4=1 \\ C_1+C_2+C_3+C_4=0 \\ C_3=0 \\ 3C_1+2C_2+C_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_4=1 \\ C_3=0 \\ C_1+C_2+1=0 \\ 3C_1+2C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_4=1 \\ C_3=0 \\ C_1=2 \\ C_2=-3 \end{cases}$$

$$x(t)=2t^3-3t^2+1$$

Ответ: $x(t)=2t^3-3t^2+1$ – экстремаль $J[x]$.